Sterowanie minimalnowariancyjne

Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z metodą wyznaczania sterowania minimalnowariancyjnego. Po zapoznaniu się z teoretycznymi podstawami zaproponowana zostanie procedura, która pozwala na wyznaczenie pożądanego sterowania w środowisku Matlab/Simulink. Kluczowe obliczenia zostaną zrealizowane z wykorzystaniem przybornika do obliczeń symbolicznych.

Wstęp teoretyczny

Sterownie minimalnowariancyjne jest jednym z najczęściej stosowanych strategii sterowania uwzględniających działanie układu regulacji przy działaniu zewnętrznych, stochastycznych sygnałów zakłócających. W wersji podstawowej algorytm ten minimalizuje wartość uchybu regulacji, w wersji rozszerzonej (uogólnionej) funkcja celu zawiera również składnik minimalizujący sygnały sterujące z odpowiednią wagą.

Głównym założeniem dokonywanym podczas wyprowadzania sterowania minimalnowariancyjnego jest dążenie do uzyskania wartości oczekiwanej sygnału wyjściowego $E\{y(t+d)\}$ będzie równa wartości zadanej $r(t+d)$. Rozważana będzie wariancja uchybu, a ta będzie minimalny przy możliwie dobrym odwzorowywaniu sygnału $r(t+d)$ przez sygnał $y(t+d)$.

Omawiane sterowanie wyprowadza się w oparciu o znany model obiektu

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-d) + C(q^{-1})\xi(t), \tag{1}$$

gdzie *u(t)*-sterowanie, *y(t)*-wyjście, $\xi(t)$ - zakłócenia, a wielomiany

$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + ... + a_{nA} q^{-nA}$,

$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + ... + b_{nB} q^{-nB}$,

$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + ... + c_{nC} q^{-nC}$,

a nA,nB,nC oznaczają stopnie wielomianów $A(q^{-1})$, $B(q^{-1})$ i $C(q^{-1})$.

Wyjście takiego obiektu opisać można za pomocą następującego wzoru

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t-d) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}\xi(t), \tag{2}$$

lub jego równoważnej formy, ułatwiającej zapis wpływu zakłóceń jako

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t-d) + \eta(t) \tag{3}$$

To równanie będzie podstawą do wyprowadzenia prawa sterowania. Aby wyliczyć wartość u(t) należy dokonać predykcji powyższego równania o *d* kroków w przód – w ten sposób otrzymamy możliwość bezpośredniego wyznaczenia wartości sygnału sterującego podawanego w aktualnej chwili *t*, mającego skutek w chwili *t+d*. Potrzebne będą więc odpowiednio predyktor wyjścia oraz predyktor zakłócenia. Przesuwając całe równanie 3 o d próbek w przód otrzymujemy równanie

$$y(t+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) + \eta(t+d) \tag{4}$$

z bieżącym sygnałem sterującym w formie jawnej, i to on jest wynikiem działania algorytmu regulacji. Pierwszym etapem wyznaczenia sterowania minimalnowariancyjnego jest rozwiązanie równania diofantycznego

$$A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d} S(q^{-1}) = C(q^{-1}) \tag{5}$$

wynikiem tego równania są dwa wielomiany

$$R(q^{-1}) = 1 + r_1 q^{-1} + \ldots + r_{d-1} q^{-d+1} \tag{6}$$

$$S(q^{-1}) = s_0 + s_1 q^{-1} + \ldots + s_{nA-1} q^{-nA+1} \tag{7}$$

Mając na uwadze wzór (3) oraz (5) można wyznaczyć teraz predyktor zakłóceń na *d* kroków do przodu wykorzystując następujące równania:

$$\eta(t+d) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} \xi(t+d) = \frac{S(q^{-1})}{A(q^{-1})} \xi(t) + R(q^{-1}) \xi(t+d) \tag{8}$$

Żeby zrozumieć to przekształcenie, należy pamiętać, że $\xi(t+d)q^{=d} = \xi(t)$. Teraz, podstawiając za $\xi(t)$ wartość uzyskaną z równania (1) można dokonać następujących przekształceń:

$$\eta(t+d) = \left(\frac{A(q^{-1})S(q^{-1})}{A(q^{-1})C(q^{-1})} y(t) - \frac{q^{-d} B(q^{-1})S(q^{-1})}{A(q^{-1})C(q^{-1})} u(t) \right) + R(q^{-1}) \xi(t+d)$$

$$\eta(t+d) = \left(\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(t) - \frac{q^{-d} B(q^{-1})S(q^{-1})}{A(q^{-1})C(q^{-1})} u(t) \right) + R(q^{-1}) \xi(t+d)$$

$$\eta(t+d) = \frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left(y(t) - \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t-d) \right) + R(q^{-1}) \xi(t+d) \tag{9}$$

Dzięki tym obliczeniom uzyskano predyktor wpływu wielkości zakłóceń na pracę układu. Teraz należy obliczyć drugi interesujący nas człon predykujący, a więc predyktor wyjścia. Można obliczyć go niemal bezpośrednio z równania 4, podstawiając wartość predyktora zakłóceń z równania (9), w następujący sposób:

$$y(t+d)=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t)+\eta(t+d)$$

$$y(t+d)=\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t)+\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}\left(y(t)-\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t-d)\right)+R(q^{-1})\xi(t+d)$$

$$y(t+d)=\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t)+\left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}-\frac{q^{-d}B(q^{-1})S(q^{-1})}{A(q^{-1})C(q^{-1})}\right)u(t)+R(q^{-1})\xi(t+d)$$

$$y(t+d)=\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t)+\left(\frac{B(q^{-1})\left(C(q^{-1})-q^{-d}S(q^{-1})\right)}{A(q^{-1})C(q^{-1})}\right)u(t)+R(q^{-1})\xi(t+d) \tag{10}$$

Teraz, korzystając w równania diofantycznego (5) ostatecznie zapisać

$$y(t+d)=\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t)+\left(\frac{B(q^{-1})R(q^{-1})}{C(q^{-1})}\right)u(t)+R(q^{-1})\xi(t+d) \tag{11}$$

Teraz wiedząc, że wartość wyjścia po czasie opóźnienia *d* możemy zapisać za pomocą równania

$$y(t+d)=\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t)+\left(\frac{B(q^{-1})R(q^{-1})}{C(q^{-1})}\right)u(t)+R(q^{-1})\xi(t+d) \tag{12}$$

oraz

$$y(t+d)=y(t+d\,|\,t)+R(q^{-1})\xi(t+d) \tag{13}$$

gdzie $y(t+d\,|\,t)$ oznacza wartość wyjścia w chwili *t+d* przewidywaną zgodnie z pomiarami dostępnymi w chwili *t*.

Podstawiając równanie (12) do równania (13) otrzymujemy

$$\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t)+\left(\frac{B(q^{-1})R(q^{-1})}{C(q^{-1})}\right)u(t)+R(q^{-1})\xi(t+d)=y(t+d\,|\,t)+R(q^{-1})\xi(t+d) \tag{14}$$

a następnie

$$\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t)+\left(\frac{B(q^{-1})R(q^{-1})}{C(q^{-1})}\right)u(t)=y(t+d\,|\,t) \tag{15}$$

Z założenia pożądanym zachowaniem jest minimalizacja różnicy pomiędzy wartością przewidywaną a zadaną, dzięki czemu można zapisać

$$r(t+d)=y(t+d\,|\,t)$$

co prowadzi do równania

$$\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t)+\frac{B(q^{-1})R(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(t)=r(t+d) \tag{16}$$

z którego już bezpośrednio wyprowadzana jest zależność pozwalająca na uzyskanie wartości zmiennych sterujących. Po obustronnym wymnożeniu przez wielomian $C(q^{=1})$ otrzymujemy:

$$S(q^{-1})y(t)+B(q^{-1})R(q^{-1})u(t)=C(q^{-1})r(t+d) \tag{17}$$

Teraz już wystarczy uporządkować równanie względem sygnału sterującego $u(t)$ otrzymując ostateczne równanie sterowania minimalnowariancyjnego:

$$u(t)=\frac{C(q^{-1})r(t+d)-S(q^{-1})y(t)}{B(q^{-1})R(q^{-1})}, \tag{18}$$

które minimalizuje uchyb regulacji w obecności zakłóceń.

Przykładowe rozwiązanie numeryczne

Dla obiektu opisanego wielomianami $A(q^{-1})=1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}$, $B(q^{-1})=b_0+b_1q^{-1}, C(q^{-1})=1,$ $d=1$ należy określić strukturę wielomianów $R(q^{-1})$ oraz $S(q^{-1})$. Wiedząc że czas opóźnienia $d=1$ możemy określić, że najwyższą potęgą występującym w wielomianie $R(q^{-1})$ jest $r_{d-1}q^{-d+1}$ można wywnioskować, że jedynym występującym wyrazem będzie

$$R(q^{-1})=1.$$

Powtarzając to wnioskowanie dla wielomianu $S(q^{-1})$, wiedząc że stopień wielomianu A jest równy 2 to wielomian $S(q^{-1})$ będzie miał postać

$$S(q^{-1})=s_0+s_1q^{-1}.$$

Znając struktury poszczególnych wielomianów można rozpocząć proces rozwiązywania równania diofantycznego, które przy takich założonych wielomianach można zapisać w następującej formie

$$\left(1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}\right)1+q^{-1}(s_0+s_1q^{-1})=1.$$

Należy teraz przegrupować równanie w taki sposób, aby porównać współczynniki stojące przy kolejnych potęgach q^{-1} w następujący sposób

$$1+q^{-1}(a_1+s_0)+q^{-2}(a_2+s_1)=1. \tag{19}$$

Uzyskujemy w ten sposób układ równań pozwalający na rozwiązanie równania diofantycznego

$$\begin{cases} (a_1 + s_0) = 0 \\ (a_2 + s_1) = 0 \end{cases} \tag{20}$$

Znając strukturę i wartości wszystkich wielomianów można wyznaczyć wartości sterowania minimalnowariancyjnego zgodnie ze wzorem (18)

$$b_0 u(t) + b_1 u(t-1) = r(t+d) - s_0 y(t) - s_1 y(t-1),$$

$$b_0 u(t) = r(t+d) - s_0 y(t) - s_1 y(t-1) - b_1 u(t-1),$$

$$u(t) = \frac{r(t+d) - s_0 y(t) - s_1 y(t-1) - b_1 u(t-1)}{b_0}. \tag{21}$$

Podstawiając rozwiązania równania diofantycznego przedstawione wzorem (20) uzyskujemy

$$u(t) = \frac{r(t+d) + a_1 y(t) + a_2 y(t-1) - b_1 u(t-1)}{b_0}, \tag{22}$$

Dla przykładowego obiektu opisanego wielomianami

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.8q^{-1} + 0.9q^{-2}$$

$$B(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$$

$$C(q^{-1}) = 1$$

Po podstawieniu wartości wielomianów do uzyskanego sterowania (22) otrzymujemy bezpośredni wzór pozwalający na wyznaczenie wartości sterowania w danym kroku:

$$u(t) = r(t+d) - 1.8y(t) + 0.9y(t-1) - 0.5u(t-1) \tag{23}$$

minimalizujące wskaźnik jakości jakim jest wariancja uchybu.

Przebieg ćwiczenia

1. Stworzyć nowy skrypt programu Matlab. Na początku pliku umieścić komendy zamykające otwarte okna oraz czyszczące pamięć podręczną.

2. Zadeklarować symboliczne zmienne, potrzebne do obliczenia sterowania minimalnowariancyjnego. W rozpatrywanym przypadku należy zadeklarować zmienne q, s_0, s_1. Deklaracji zmiennych symbolicznych można dokonać wykorzystując składnię q=sym('q','real).

3. Wykorzystując zadeklarowane zmienne symboliczne utworzyć wielomiany $A(q^{-1}) = 1 - 1.8q^{-1} + 0.9q^{-2}$ oraz $B(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$.

4. Zgodnie z treścią przedstawionego w powyższej instrukcji zadeklarować wielomiany *C*,*R* oraz *S.* Szczególną uwagę zwrócić na deklarację wielomianu S, gdzie powinny zostać wykorzystane zmienne symboliczne.

5. W oparciu o równanie (5) zapisać równanie diofantyczne w takiej formie, aby po prawej stronie równania pozostało tylko zero.

6. W następnych punktach zostanie obliczone rozwiązanie równania diofantycznego. W tym celu należy pogrupować kolejne wyrazy równania diofantycznego względem kolejnych potęg operatora q. Wykorzystać polecenie *collect.*

7. Wykorzystać komendę *expand* w celu uzyskania bardziej przejrzystej formy równania.

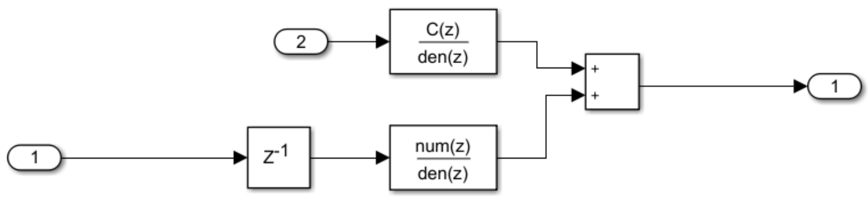
8. Aby kontynuować obliczenia należy uzyskany wynik wymnożyć przez współczynnik q^2, a uzyskany wynik uszeregować za pomocą polecenia *simplify*.

9. Ponownie pogrupować wyrazy względem potęgi operatora q, a następnie wyodrębnić poszczególne współczynniki za pomocą komendy *coeffs*.

10. Wiedząc, że w punkcie 5 założyliśmy zero po prawej stronie równania, można teraz przyrównać otrzymane współczynniki do zera. W celu uzyskania wartości s_0, s_1 wykorzystać polecenie *solve*, wynik zapisać w zmiennej *s*.

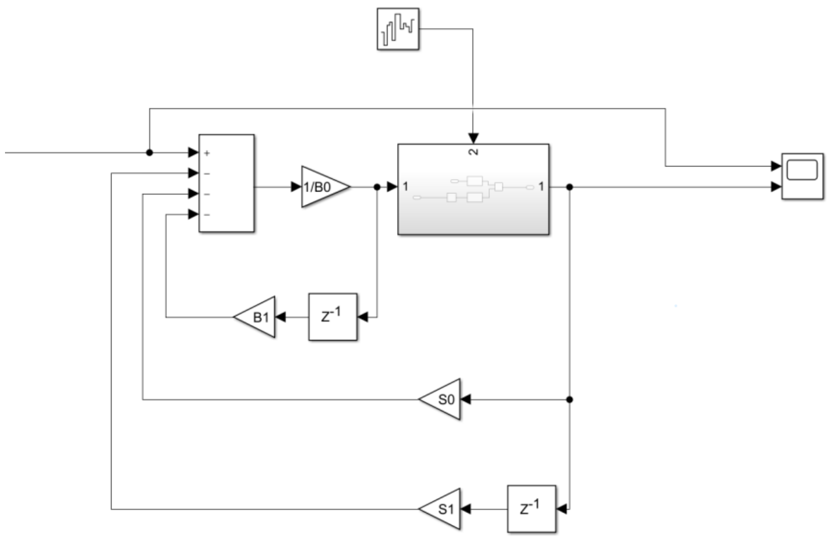
11. Otrzymane wyniki należy teraz przekonwertować do liczby zmiennoprzecinkowej. W celu konwersji wykorzystać polecenie *double*. Aby uzyskać dostęp do wyników należy wykorzystać składnię $s.s_1$.

12. Utworzyć nowy model symulacyjny środowiska simulink. Wykorzystując bloki *Discrete Filter* oraz blok opóźnienia zrealizować model obiektu opisany zgodnie z równaniem (2). Model utworzyć jako subsystem, pozwolić na wprowadzenie dwóch sygnałów – sterowania oraz zakłócenia.



13. Zbadać odpowiedź układu na skok jednostkowy przy zerowych zakłóceniach

14. Za pomocą bloków wzmocnień, opóźnień oraz sumatora , stworzyć układ realizujący równanie (21). Dodać blok generujący szum (Band-Limited White Noise), ustawić moc szumu na 0.001. Jako ziarno generatora szumy wpisać swój numer indeksu.



15. Zbadać działanie układu dla wartości zadanej pobieranej z bloku *Chirp Signal* dla czasu symulacji równej 30s. W sprawozdaniu przedstawić przebieg porównujący wartość wyjściową oraz zadaną. Opracować moduł zliczający sumaryczną wartość kwadratu uchybu regulacji, wyniki przedstawić.

16. Zmienić generator wartości zadanej na blok Pulse Generator, ustawić szerokość impulsu na 50%, powtórzyć badania z poprzedniego punktu.

17. Odciąć sygnał zaszumiający, powtórzyć badanie układu regulacji.