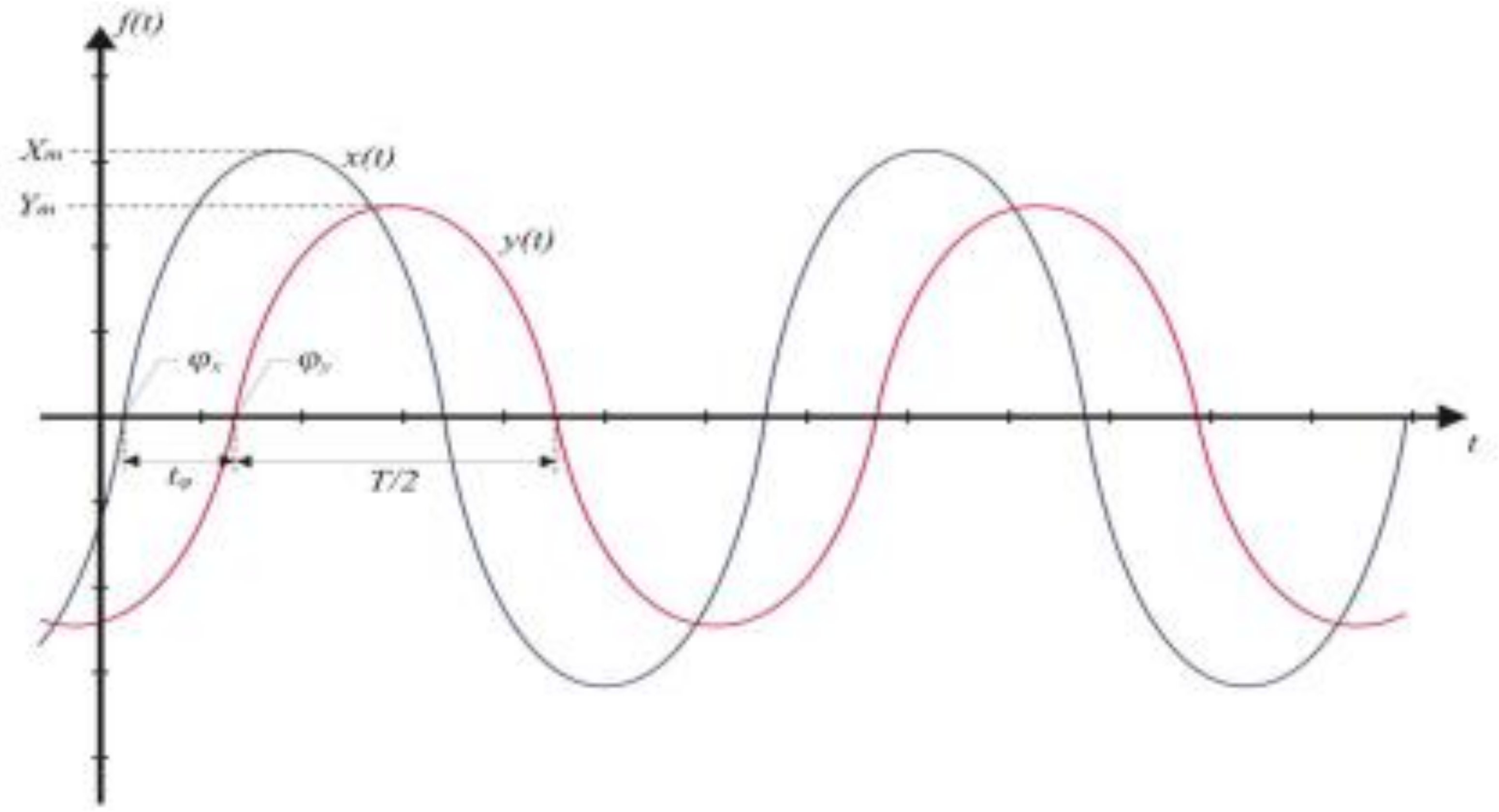
Charakterystyki częstotliwościowe

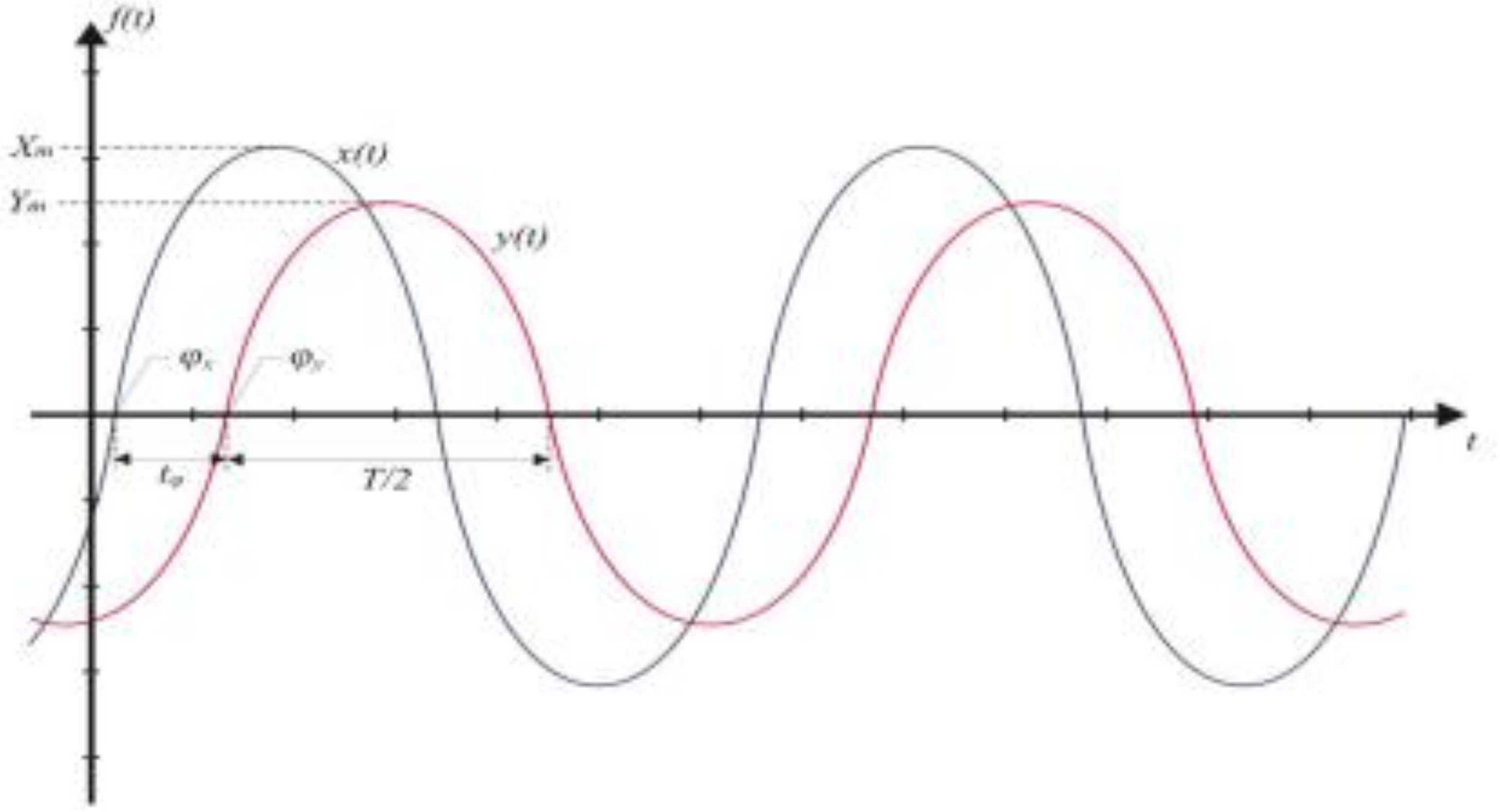
linowych obiektów stacjonarnych

Charakterystyki częstotliwościowe

Charakterystyki dynamiczne częstotliwościowe są elementem tzw. analizy częstotliwościowej sygnałów. Charakterystyki częstotliwościowe należą do grupy dynamicznych - określają one zachowanie układu w sinusoidalnym stanie ustalonym. Jeżeli na wejście układu liniowego i stacjonarnego zostanie wprowadzony sygnał sinusoidalny, to po wygaśnięciu stanów przejściowych na wyjściu pojawi się również sygnał sinusoidalny o tej samej częstotliwości.



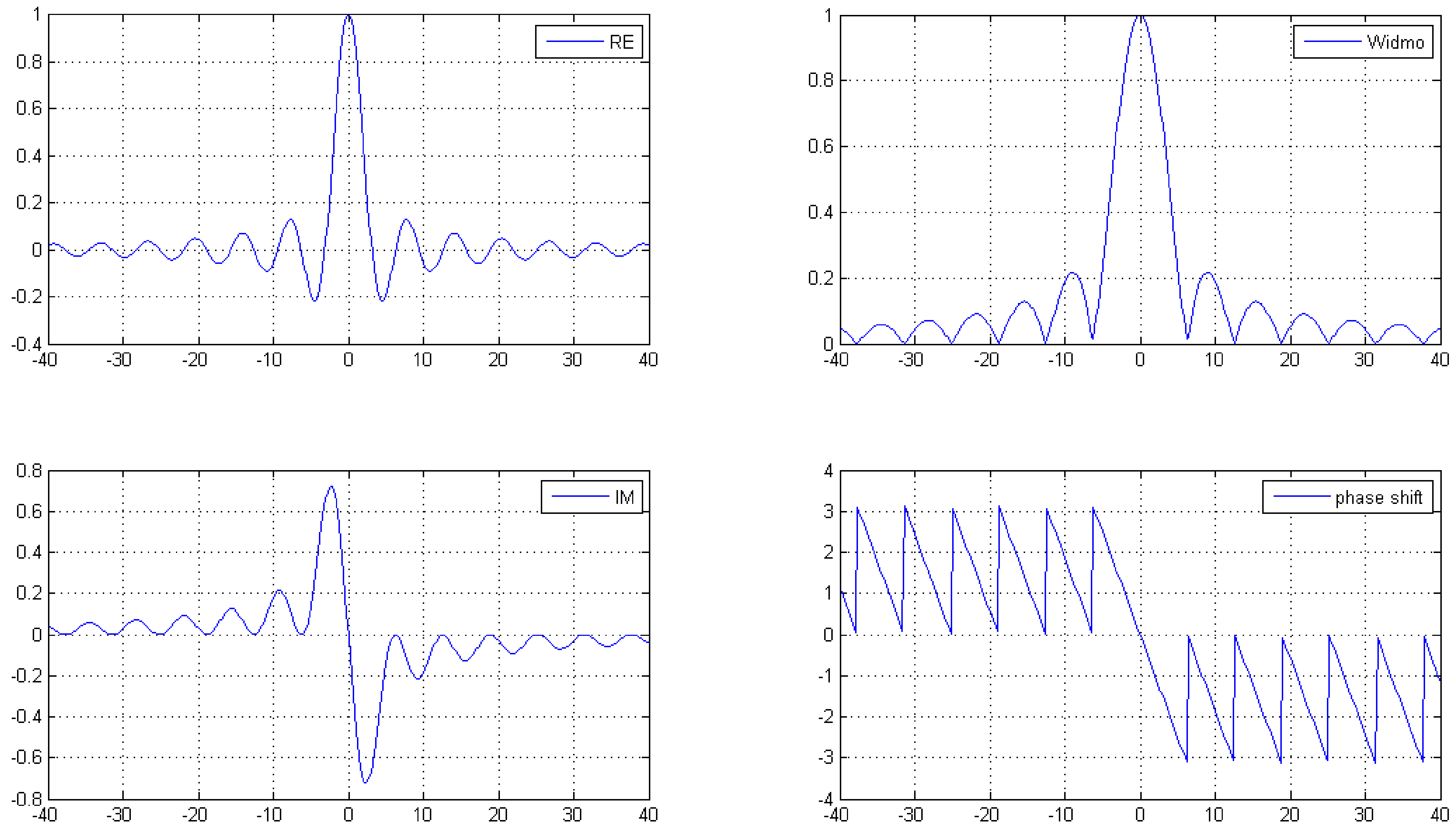
Charakterystyki częstotliwościowe



W ogólnym przypadku sygnał wyjściowy będzie będzie opóźniony w fazie oraz posiadał inną amplitudę niż sygnał wejściowy. Układ można w zatem opisać wykorzystując podane zachowanie, a mianowicie przedstawiając stosunek amplitudy na wyjściu do amplitudy na wejściu i różnicy faz w całym zakresie częstotliwości wymuszającej.

Charakterystyki częstotliwościowe mogą być zdejmowane eksperymentalnie i na ich podstawie można dokonywać identyfikacji właściwości dynamicznych procesów.

Transformata Fouriera



Transformacja Fouriera dokonuje przejścia między dziedziną czasu a dziedziną zespolonej pulsacji:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Dzięki takiej transformacji otrzymujemy amplitudy sygnałów o kolejnych wielokrotnościach częstotliwości bazowej

Fourier vs. Laplace

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$e^{i\omega t} = cos\,(\omega t) + i\,(sin\,\omega t)$$

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

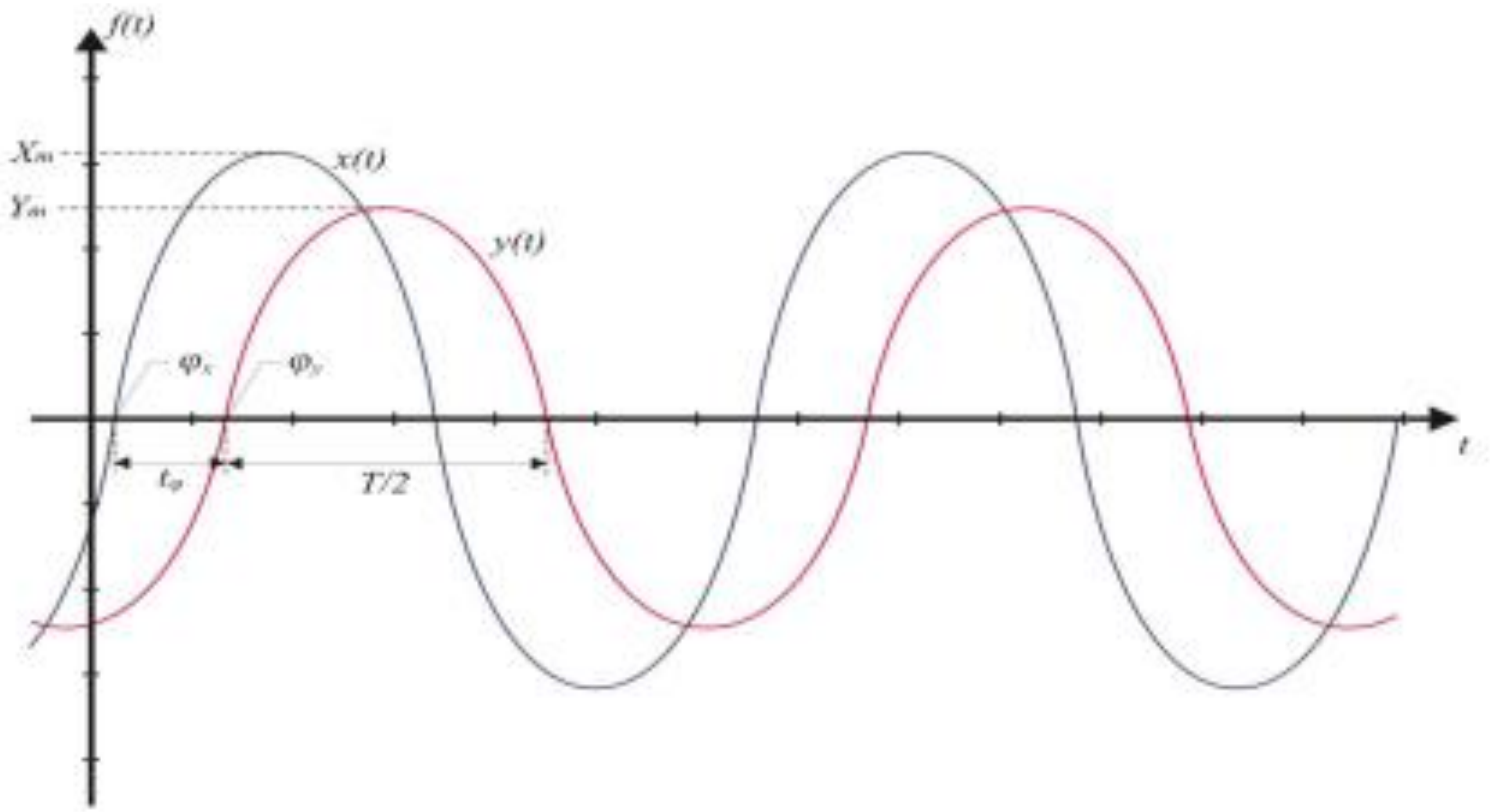
$$s = \sigma + j\omega$$

Wychwycenie występowania składowych o różnych częstotliwościach

Służy głównie do opisu sygnałów

Służy głównie do opisu systemów (obiektów)

Charakterystyki częstotliwościowe



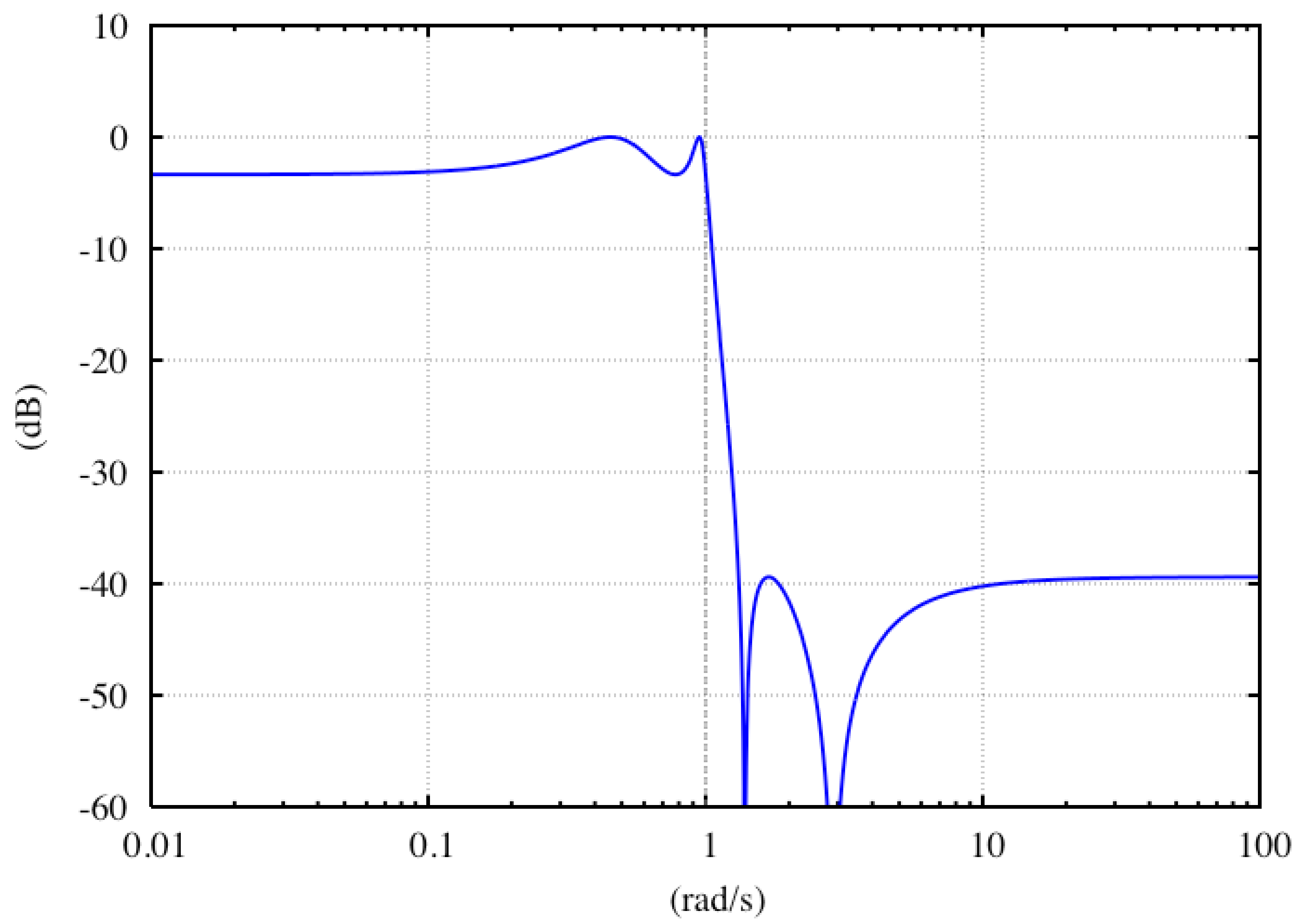
Charakterystyki częstotliwościowe to takie charakterystyki, które ukazują zależności pomiędzy częstotliwością sygnału wejściowego a charakterem sygnału wyjściowego.

$$G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Uzyskanie takich charakterystyk jest możliwe dzięki transmitancji widmowej

Charakterystyki częstotliwościowe
Charakterystyka amplitudowa

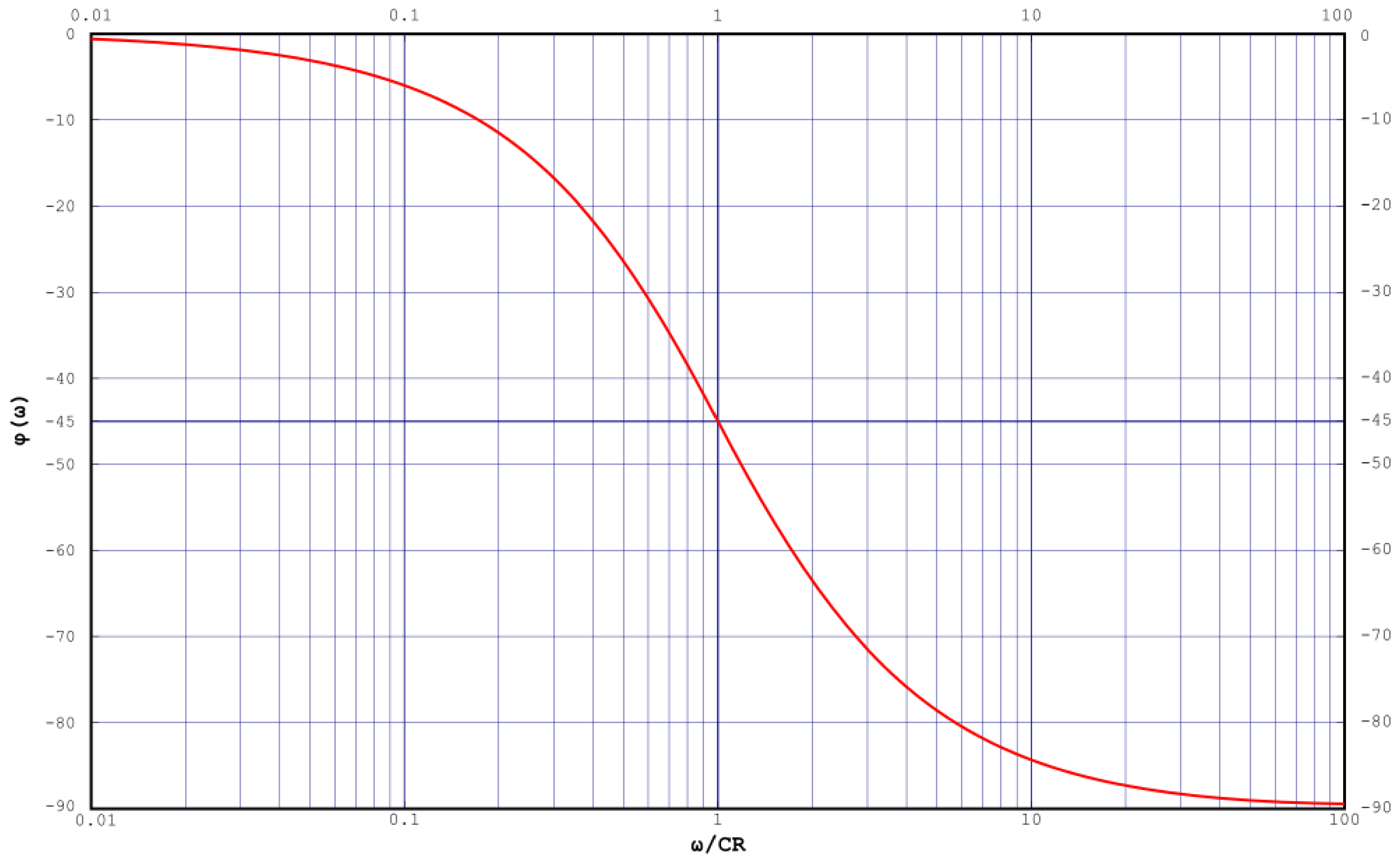
Charakterystyka amplitudowa – w elektronice oraz przetwarzaniu sygnałów, wykres modułu zespolonej transmitancji widmowej układu LTI (np. wzmacniacza albo filtra) w funkcji częstotliwości lub pulsacji.



Charakterystyka amplitudowa pokazuje jak układ wzmacnia lub tłumi określone składowe widmowe sygnału w zależności od ich częstotliwości.

Charakterystyki częstotliwościowe
Charakterystyka fazowa

Charakterystyka fazowa w elektronice oraz przetwarzaniu sygnałów, to wykres argumentu zespolonej transmitancji widmowej układu LTI (np. wzmacniacza lub filtru) w funkcji częstotliwości lub pulsacji.



Charakterystyka fazowa obrazuje, jak układ zmienia widmo fazowe sygnału, który przez niego przechodzi. Inaczej mówiąc, charakterystyka fazowa pokazuje jak układ zmienia fazę poszczególnych składowych widmowych sygnału w zależności od ich częstotliwości

Charakterystyki Bodego

Charakterystyki częstotliwościowe
Charakterystyki Bodego

Charakterystyka częstotliwościowa logarytmiczna – w teorii sterowania jedna z najważniejszych charakterystyk częstotliwościowych układu regulacji. Wyznacza się ją dla układu opisanego transmitancją widmową.

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$|G(j\omega)| = M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = arctg\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right)$$

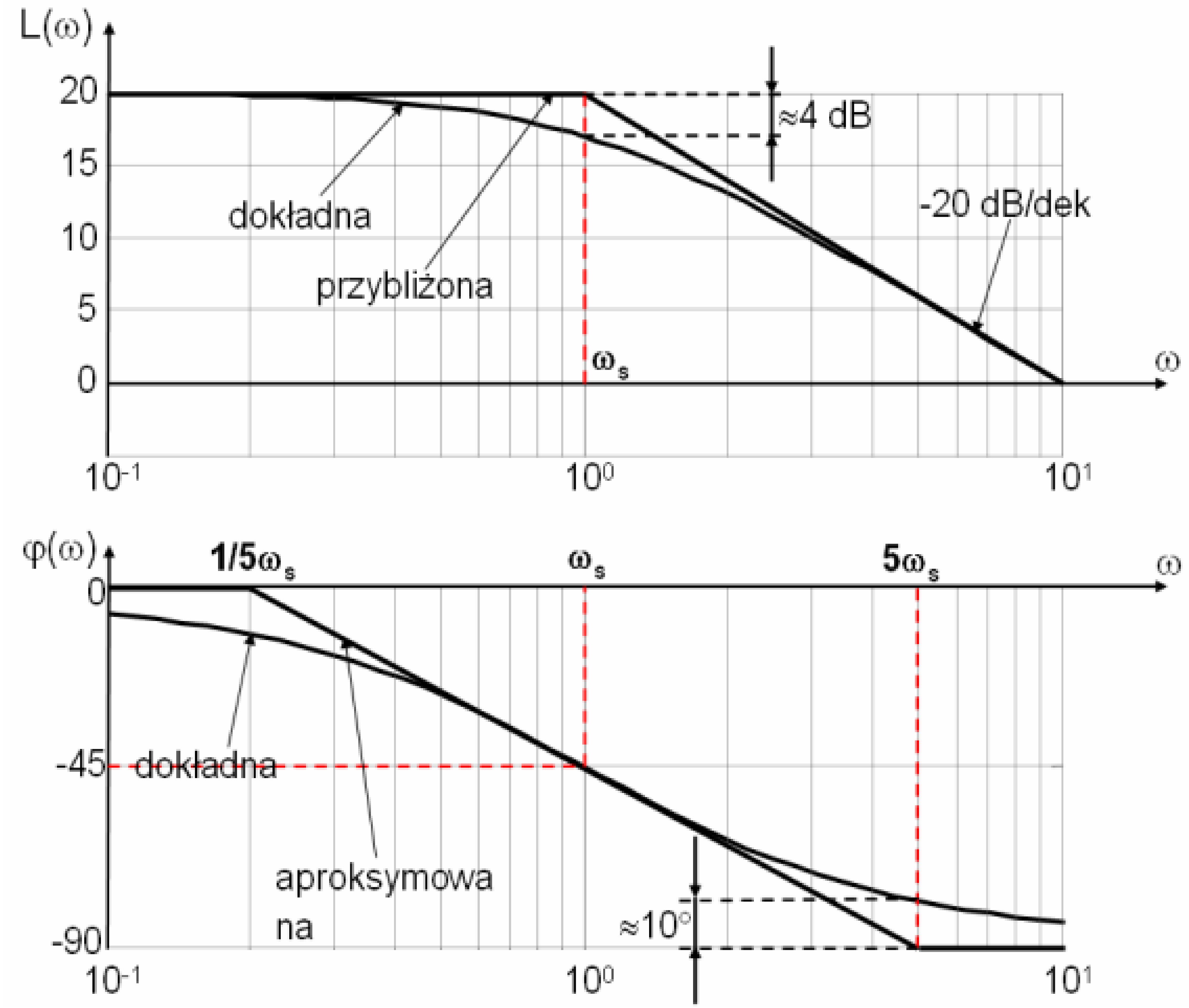
Charakterystyki częstotliwościowe

Charakterystyki Bodego

$$|G(j\omega)| = M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$L(\omega) = 20\log M(\omega)$$

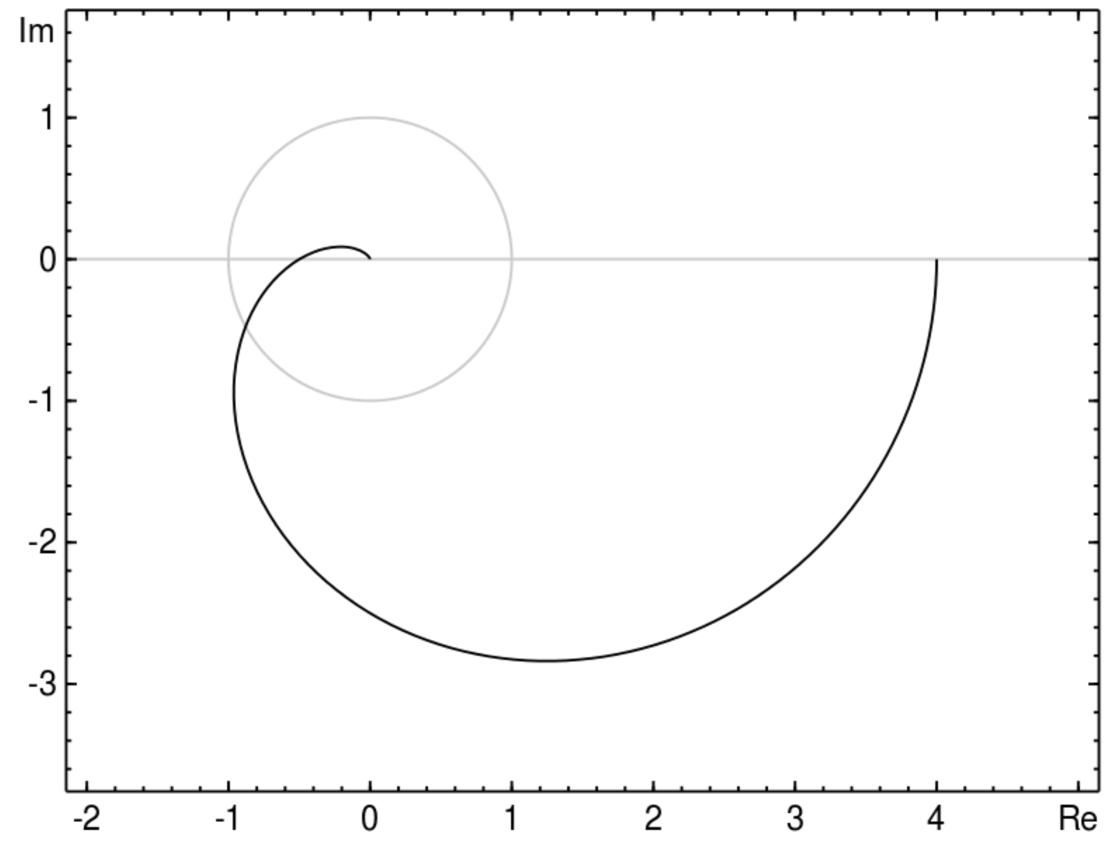
$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = arctg\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right)$$



Charakterystyki Nyquista

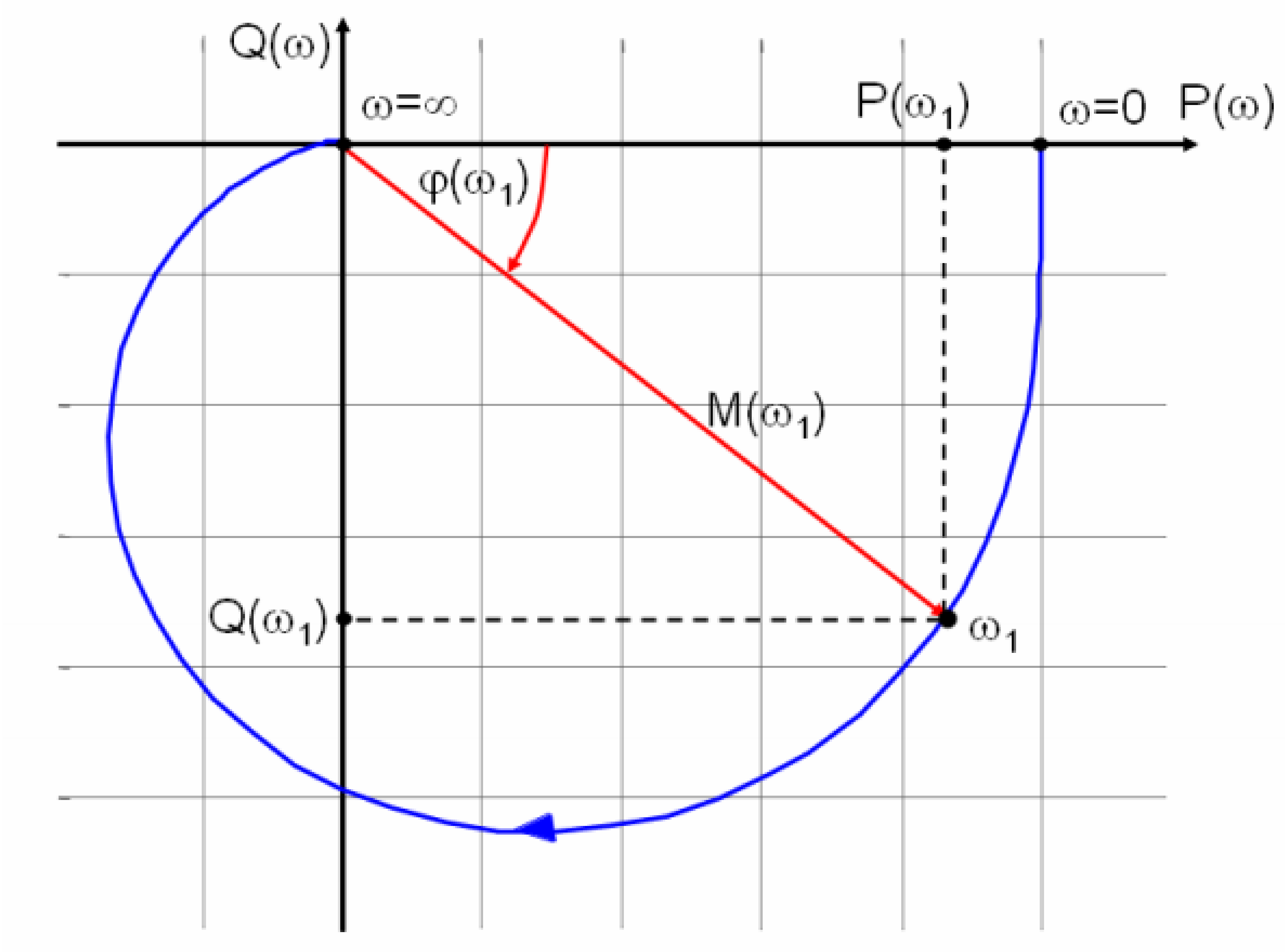
Charakterystyka Nyquista

Charakterystyka amplitudowo-fazowa, charakterystyka Nyquista, wykres Nyquista – w automatyce, wykres transmitancji widmowej układu na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.



Można ją wyznaczyć doświadczalnie, dokonując pomiarów (w stanie ustalonym) amplitudy oraz przesunięcia fazowego sygnału wyjściowego układu, gdy sygnałem wejściowym jest sygnał sinusoidalny o stałej amplitudzie i częstotliwości. Na wykresie umieszcza się punkty odpowiadające wartościom transmitancji widmowej dla kolejnych wartości. Wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej układu realizowalnego fizycznie dąży do początku układu współrzędnych.

Charakterystyka Nyquista



Wyznaczanie charakterystyk

Wyznaczanie charakterystyk

1. Wyznaczenie transmitancji operatorowej
2. Wykonanie podstawienia $s = \omega j$
3. Wyznaczenie Re(G(jω)) oraz Im(G(jω))-najczęściej poprzez pomnożenie przez sprzężenie mianownika
4. Wyznaczenie P(ω) i Q(ω) przynajmniej dla $\omega=0$, $\omega=\omega_s$, $\omega=+\infty$
5. Wykreślenie charakterystyki amplitudowo –częstotliwościowej
6. Wyznaczenie M(ω) oraz L(ω)
7. Wyznaczenie zakresów przybliżeń ($\omega \ll \omega_s$, $\omega \gg \omega_s$) i odpowiednich wzorów L(ω) dla nich
8. Obliczenie spadku na dekadę dla obydwóch zakresów
9. Wyznaczenie wartości L(ω) dla jednej wartości ω z pierwszego zakresu i jednej z drugiego (mogą być punkty przecięcia z osiami)
10. Wykreślenie logarytmicznej charakterystyki amplitudowej
11. Wyznaczenie wzoru na $\varphi(\omega)$
12. Wyznaczenie $\varphi(\omega)$ przynajmniej dla $\omega=0$, $\omega=\omega_s$, $\omega=+\infty$
13. Wykreślenie logarytmicznej charakterystyki fazowej

Przykład I

Przykład I

$$G(s)=\frac{3}{s+5}$$

$$G(j\omega)=\frac{3}{j\omega+5}$$

$$G(j\omega)=\frac{3}{j\omega+5}\cdot\frac{5-j\omega}{5-j\omega}=\frac{15-3j\omega}{25-j^2\omega^2}=\frac{15-3j\omega}{25+\omega^2}$$

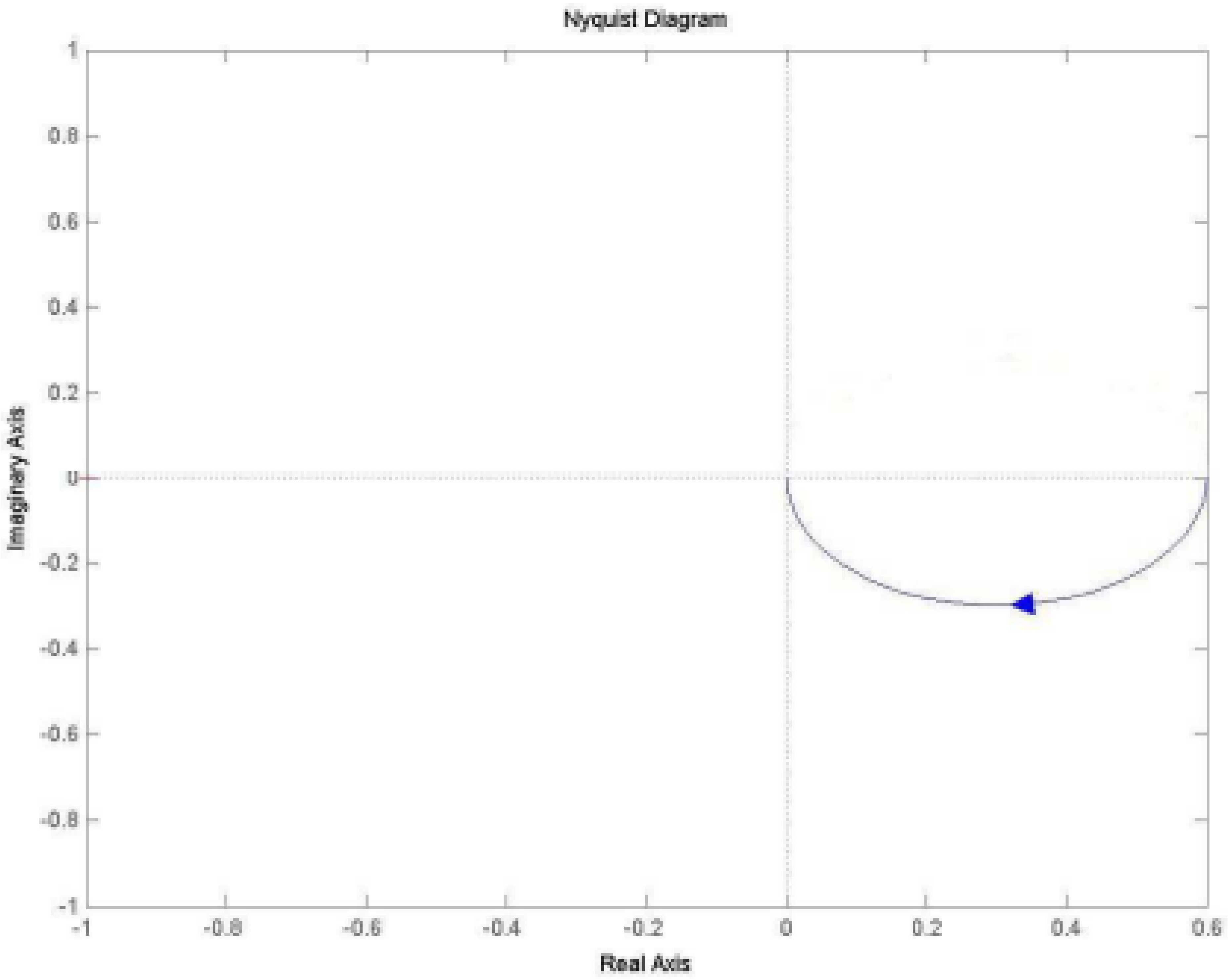
1. Wyznaczenie transmitancji operatorowej
2. Wykonanie podstawienia $s=\omega j$
3. Wyznaczenie $\mathrm{Re}(G(j\omega))$ oraz $\mathrm{Im}(G(j\omega))$-najczęściej poprzez pomnożenie przez sprzężenie mianownika

$$P(\omega)=\frac{15}{25+\omega^2}$$

$$Q(\omega)=-\frac{3\omega}{25+\omega^2}$$

Przykład I

$$G(s) = \frac{3}{s+5}$$



Wykonano tabelę argumentów:

ω	**0,**	**5**	$+\infty$
$P(\omega)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	0
$Q(\omega)$	0	$-\frac{3}{10}$	0

Przykład I

$$M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\frac{15^2}{(25+\omega^2)^2} + \frac{(3\omega)^2}{(25+\omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{15^2 + 9\omega^2}{(25+\omega^2)^2}}$$

$$L(\omega) = 20 \log M(\omega)$$

$$\omega << 5$$

$$M(\omega) == \sqrt{\frac{15^2}{25^2}} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$\mathrm{L}(\omega) = 20 \log \frac{3}{5}.$$

$$\omega >> 5$$

$$M(\omega) == \sqrt{\frac{9\omega^2}{(\omega^2)^2}} = \frac{3}{\omega}$$

$$\mathrm{L}(\omega) = 20 \log \frac{3}{\omega}.$$

Przykład I

7. Wyznaczenie zakresów przybliżeń ($\omega << \omega_s$, $\omega >> \omega_s$) i odpowiednich wzorów L(ω) dla nich
8. Obliczenie spadku na dekadę dla obydwóch zakresów

$$L(10\omega) - L(\omega) = 20[\log M(10\omega) - \log M(\omega)]$$

Czyli dla podanych przybliżeń:

$\omega<<5$	$\omega>>5$
L(10 ω)-L(ω)= 20 log$\frac{3}{5}$-20log$\frac{3}{5}$=0 Jest to prosta o równoległa do osi ω	$L(10\omega) - L(\omega) = 20\log\frac{3}{10\omega} - 20\log\frac{3}{\omega} =$ $20\log\frac{3}{10\omega}\frac{\omega}{3} = 20\log 10^{-1} = -20dB/dekadę$

Przykład I

$$M(\omega)=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)}=\sqrt{\frac{15^2}{(25+\omega^2)^2}+\frac{(3\omega)^2}{(25+\omega^2)^2}}=\sqrt{\frac{15^2+9\omega^2}{(25+\omega^2)^2}}$$

$$L(\omega)=20\log M(\omega)$$

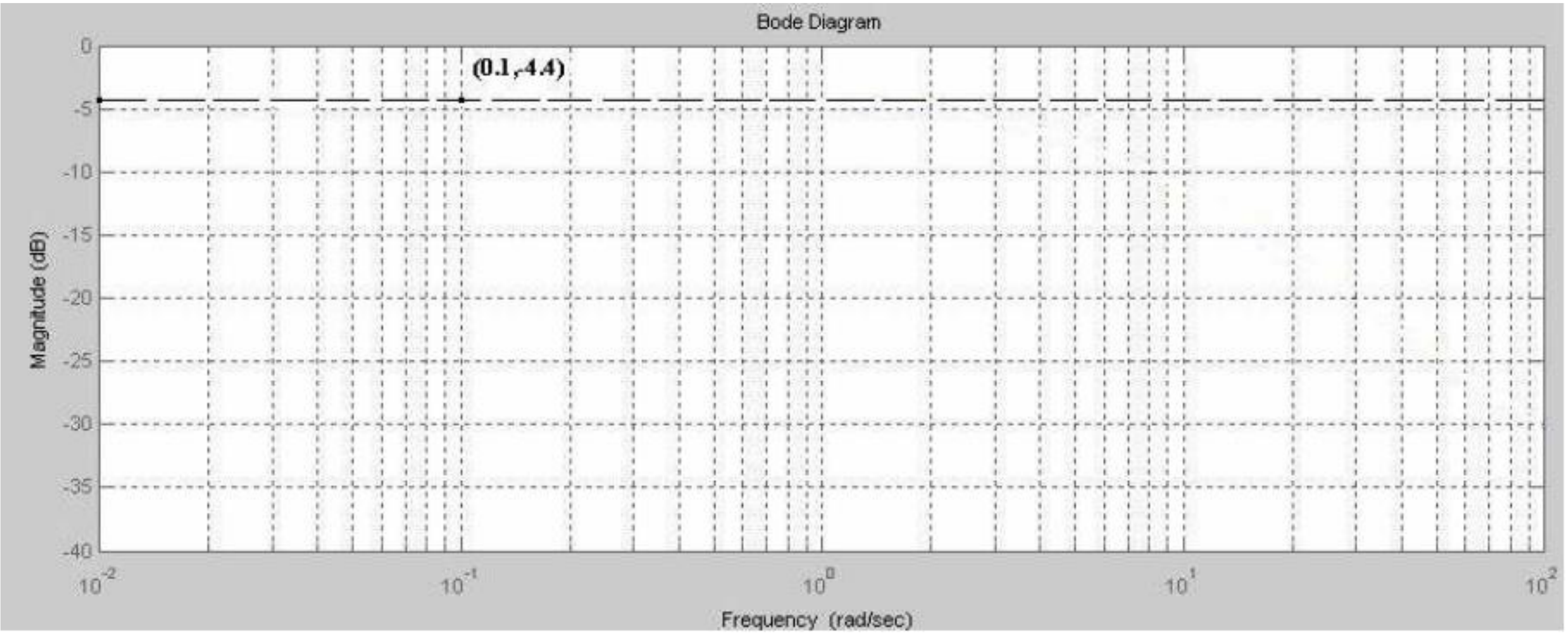
$$\omega << 5$$

$$\omega >> 5$$

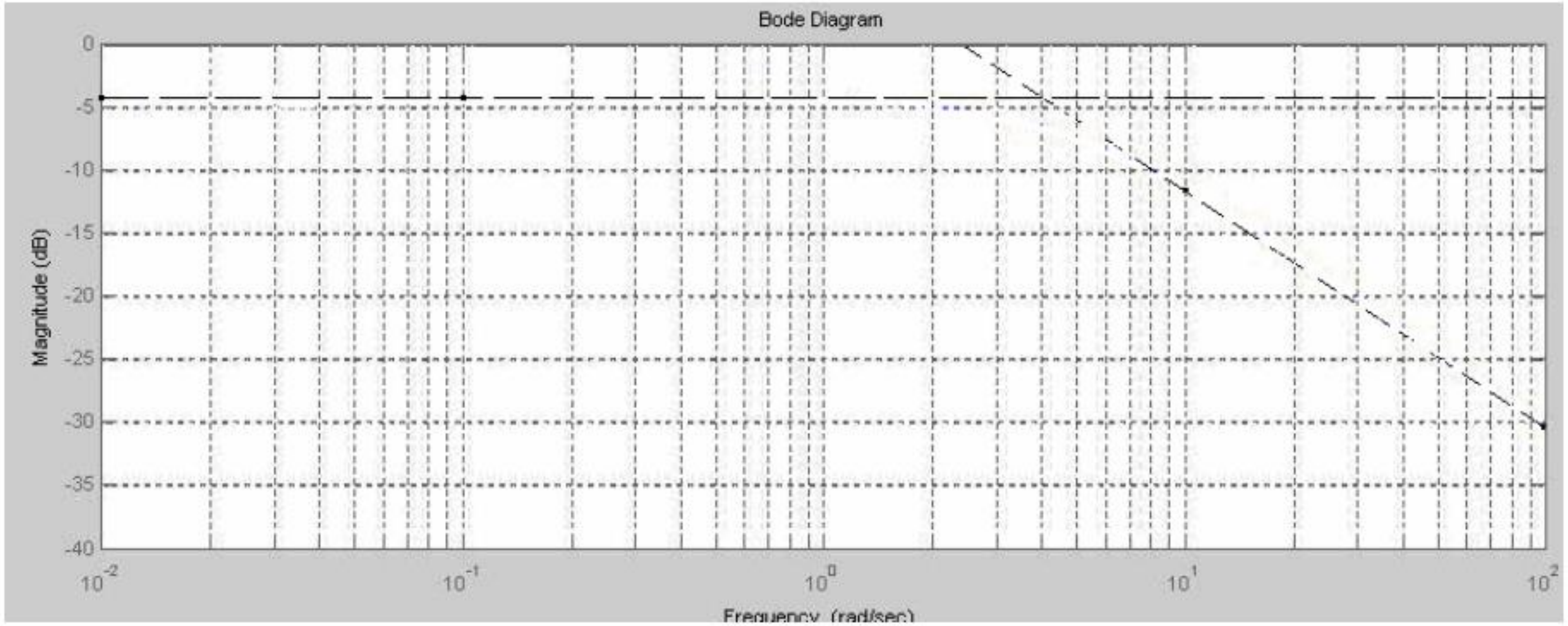
$$L(10^{-2}) = 20\log\frac{3}{5} \approx -4.4369$$

$$L(10^{2}) = 20\log\frac{3}{10^2} = 20\log 3 - 20\log 10^2 = -4.4369 - 40 = -44.4369$$

Przykład I

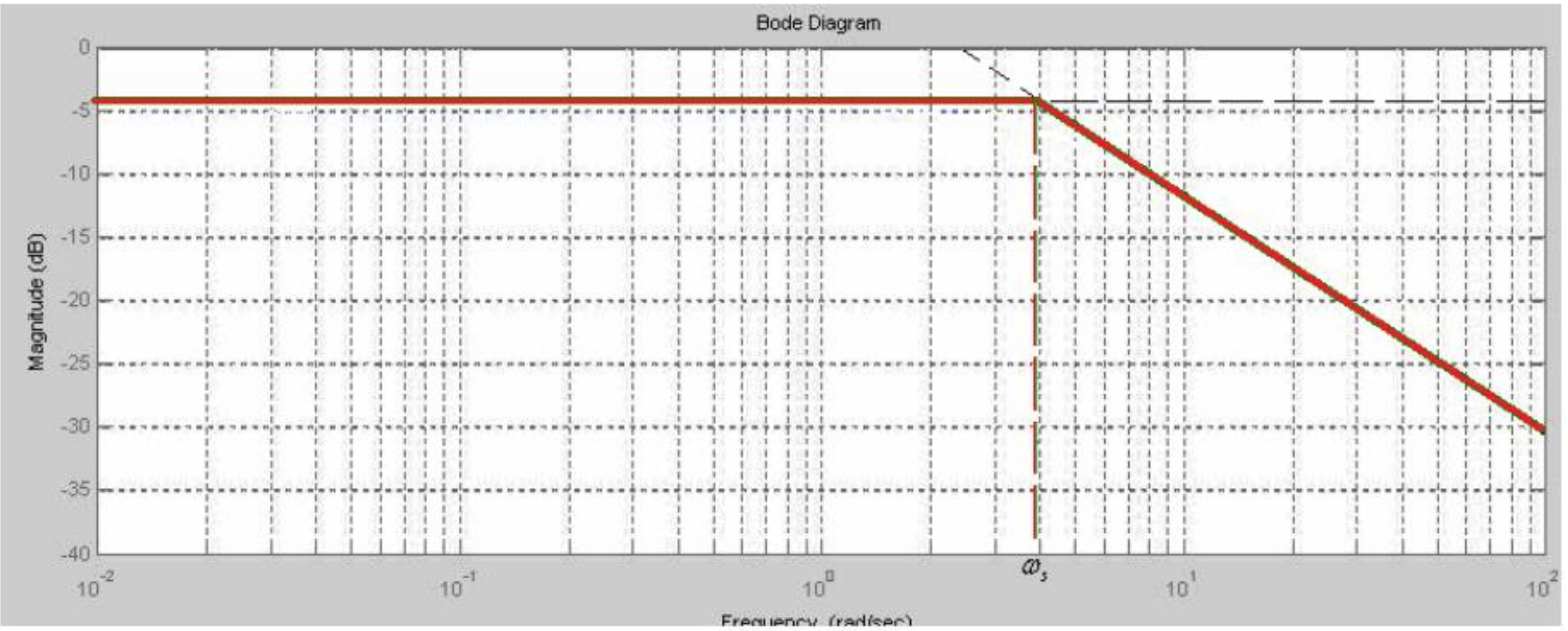

Bode Diagram
(0.1,-4.4)
Magnitude (dB)
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/sec)

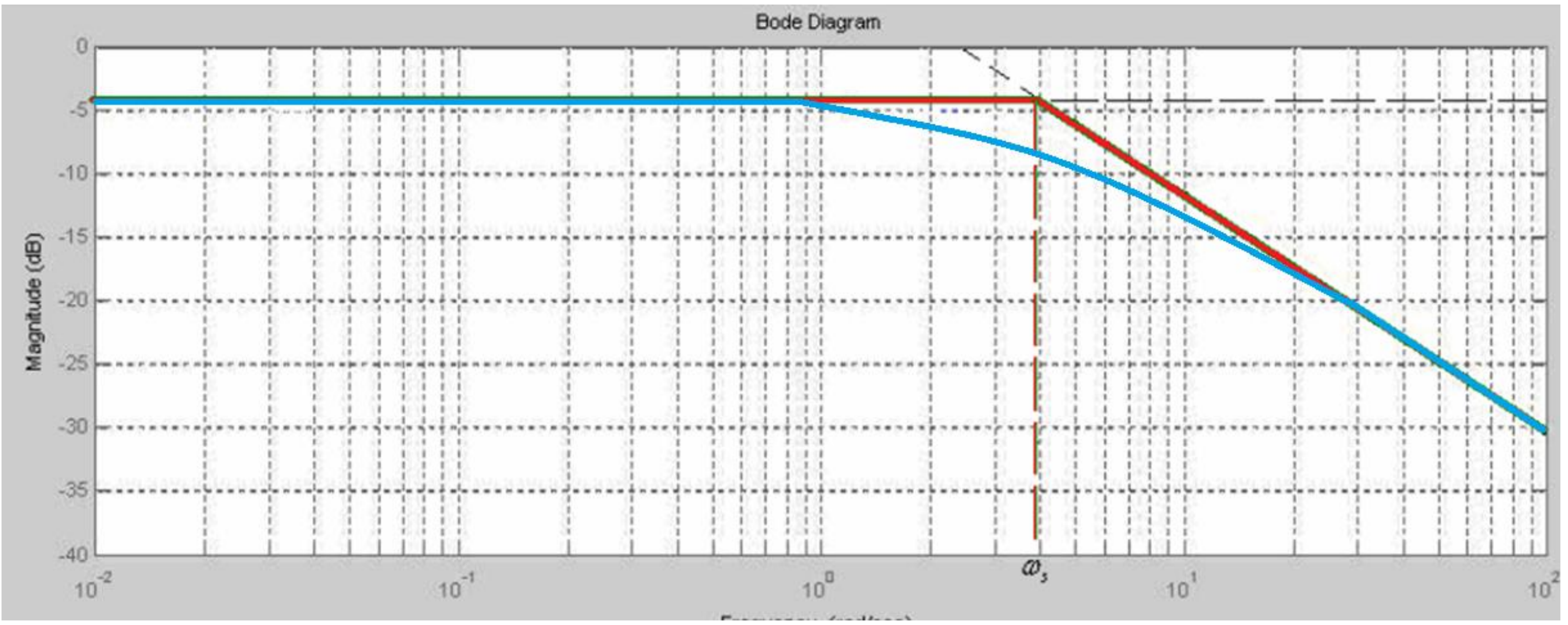
Przykład I

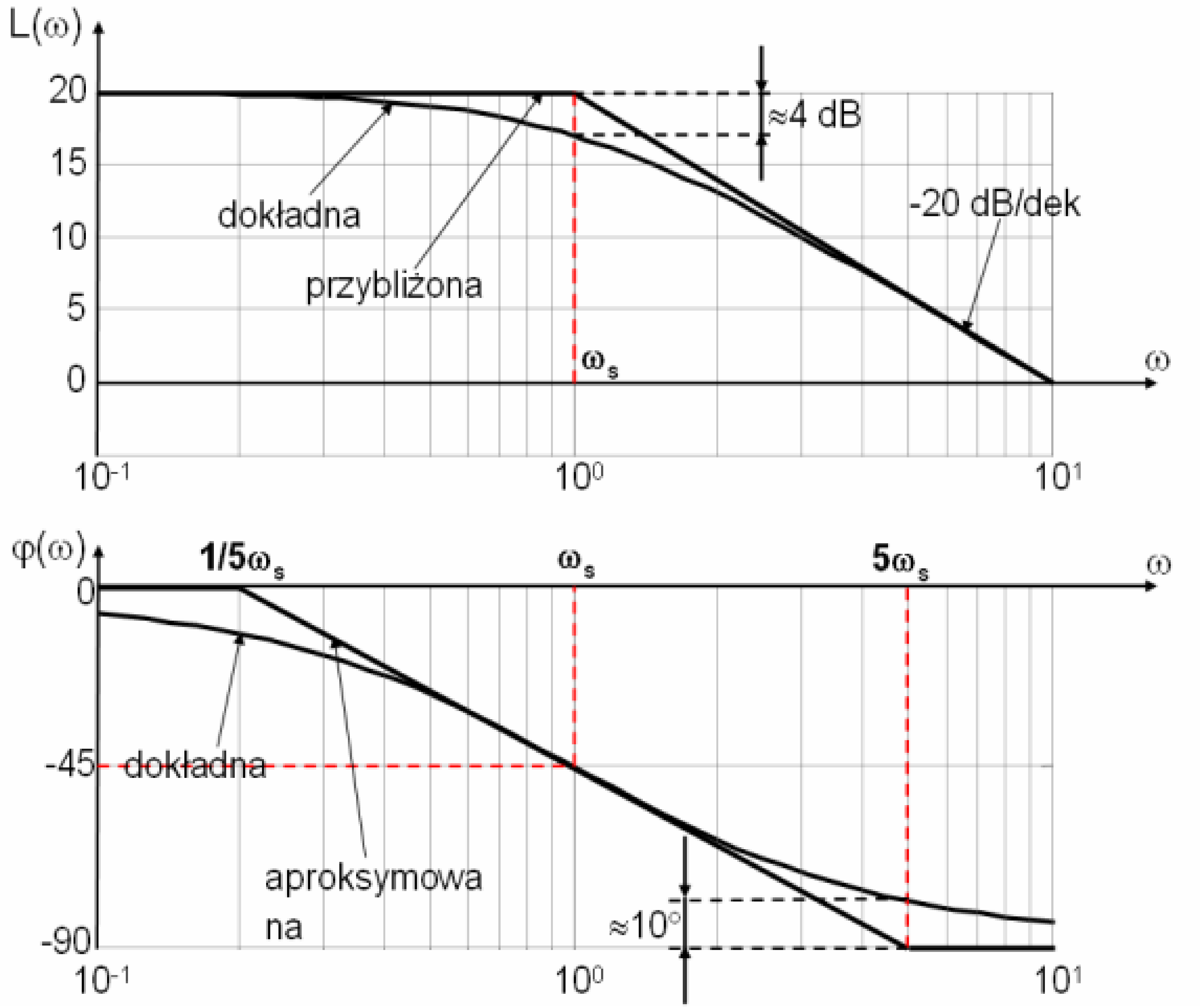


Bode Diagram
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
Magnitude (dB)
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/sec)

Przykład I


Bode Diagram
Magnitude (dB)
Frequency (rad/sec)

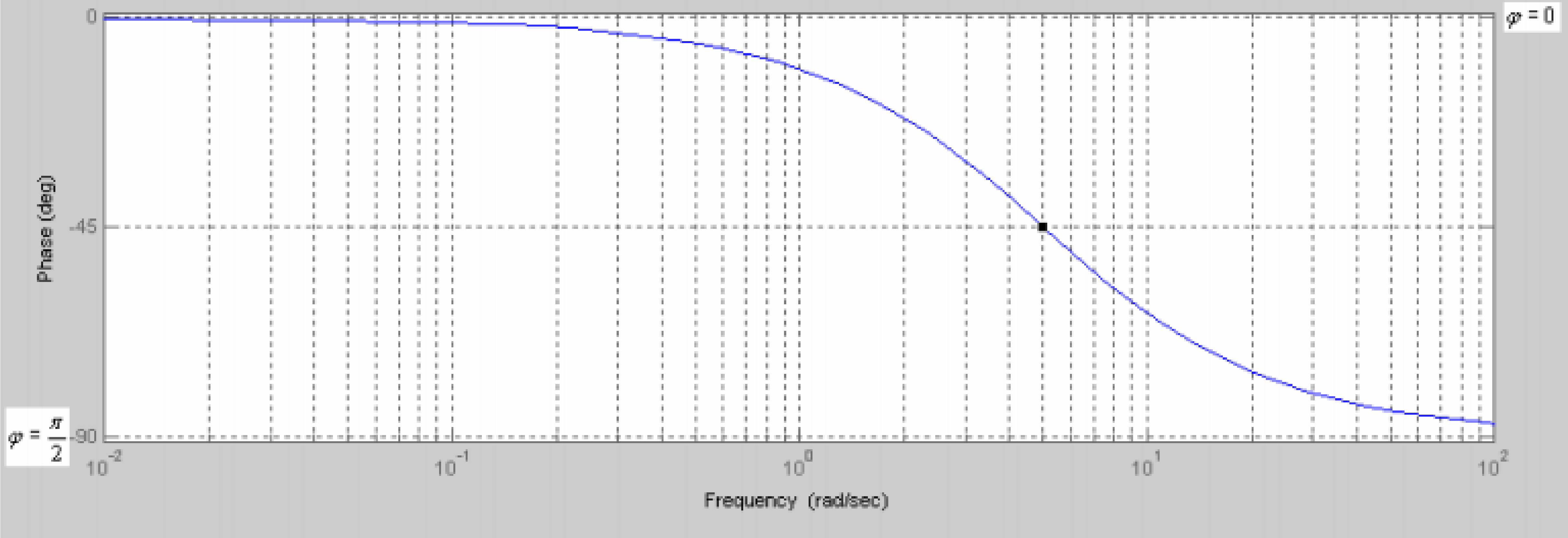

Bode Diagram
Magnitude (dB)


L(ω)
≈4 dB
dokładna
przybliżona
-20 dB/dek
ω
φ(ω)
1/5ω_s
ω_s
5ω_s
dokładna
aproksymowa
na
≈10°

Przykład I

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = arc\,tg\,\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = arc\,tg\,\frac{-\dfrac{3\omega}{25+\omega^2}}{\dfrac{15}{25+\omega^2}} = arc\,tg\,\frac{\omega}{5}$$



ω	**0,**	**5**	$+\infty$
$\varphi(\omega)$ [rad]	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$

Przykład I

1. Wyznaczenie transmitancji operatorowej
2. Wykonanie podstawienia $s = \omega j$
3. Wyznaczenie Re(G(jω)) oraz Im(G(jω))-najczęściej poprzez pomnożenie przez sprzężenie mianownika
4. Wyznaczenie P(ω) i Q(ω) przynajmniej dla ω=0, $\omega = \omega_s$, $\omega = +\infty$
5. Wykreślenie charakterystyki amplitudowo –częstotliwościowej
6. Wyznaczenie M(ω) oraz L(ω)
7. Wyznaczenie zakresów przybliżeń ($\omega \ll \omega_s$, $\omega \gg \omega_s$) i odpowiednich wzorów L(ω) dla nich
8. Obliczenie spadku na dekadę dla obydwóch zakresów
9. Wyznaczenie wartości L(ω) dla jednej wartości ω z pierwszego zakresu i jednej z drugiego (mogą być punkty przecięcia z osiami)
10. Wykreślenie logarytmicznej charakterystyki amplitudowej
11. Wyznaczenie wzoru na $\varphi(\omega)$
12. Wyznaczenie $\varphi(\omega)$ przynajmniej dla ω=0, $\omega = \omega_s$, $\omega = +\infty$
13. Wykreślenie logarytmicznej charakterystyki fazowej