Opis modelami dyskretnymi wybranych procesów fizycznych. Wpływ dyskretyzacji na stabilność.

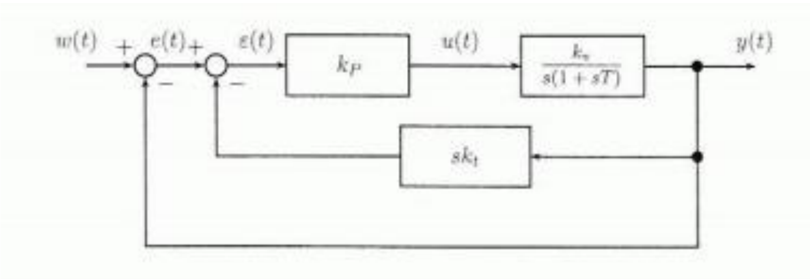
Ćwiczenie ma na celu zapoznanie się podstawowymi dyskretnymi metodami opisu obiektów i układów automatyki. Porównane zostaną różne metody dyskretyzacji obiektów ciągłych oraz omówimy wpływ czasu próbkowania na układ regulacji.

Wstęp teoretyczny

Dzięki dynamicznemu rozwojowi technologii komputerowej oraz jej zastosowaniu w automatyce, coraz częściej mamy do czynienia z układami, w których przetwarzane sygnały mają charakter cyfrowy. Jako że znakomita część obiektów przemysłowych ma charakter ciągły, istnieje potrzeba odpowiedniego, zarówno analitycznego jak i praktycznego, przekształcenia zjawisk o charakterze ciągłym na takie, które łatwo poddadzą się obróbce systemom mikroprocesorowym.

Uproszczony model serwomechanizmu

Badając zależność, jaka występuje pomiędzy napięciem twornika a położeniem wału serwomechanizmu, można dokonać pewnych uproszczeń, umożliwiających opisanie całego obiektu za pomocą względnie nieskomplikowanych równań.



Rys. 1. Model serwomechanizmu [1].

Układ serwomechanizmu składa się zazwyczaj ze wzmacniacza (*kp*), serwomotoru (tutaj zamodelowany jako układ całkujący z inercją) oraz sprzężenia tachometrycznego, zamodelowanego jako idealny układ różniczkujący ze wzmocnieniem. Przy znajomości wszystkich parametrów opisywanego obiektu otrzymujemy transmitancję układu otwartego równą [1]:

$$G(s)=\frac{\dfrac{k_pk_v}{1+k_pk_vk_t}}{s\left(1+\dfrac{sT}{1+k_pk_vk_t}\right)}. \tag{1}$$

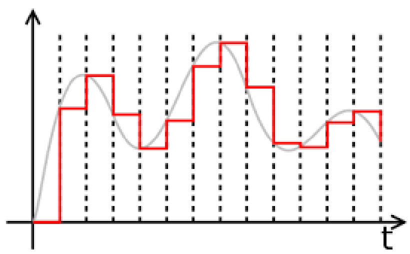
Po uproszczeniu możemy przedstawić model serwomechanizmu w postaci następującej transmitancji

$$G(s) = \frac{k_t}{s(1 + sT_t)}. \tag{2}$$

Dzięki takiemu podejściu możemy uznać (oczywiście z pewnym uproszczeniem), że serwomechanizm jest obiektem liniowym. Dla takiego obiektu dobór dyskretnego regulatora PID można wykonać w dwojaki sposób: wyliczyć regulator dla obiektu ciągłego i dokonać dyskretyzacji transmitancji regulatora, lub dokonać dyskretyzacji samego obiektu i dla tak otrzymanego dyskretnego odpowiednika serwomechanizmu dobierać nastawy regulatora.

Ekstrapolator zerowego rzędu

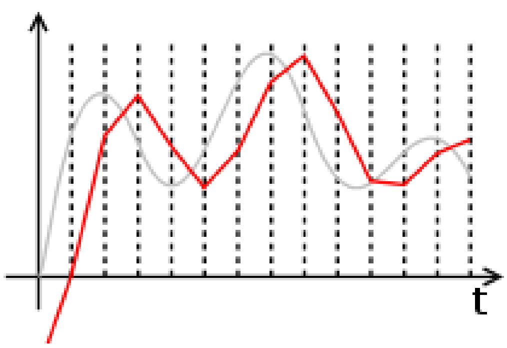
Ekstrapolator zerowego rzędu to matematyczny model, który opisuje układ dokonujący konwersji sygnału poprzez podtrzymanie wartości każdej z próbek przez jeden okres próbkowania.



Rys. 2. Ekstrapolator zerowego rzędu [2]

Ekstrapolator pierwszego rzędu

Ekstrapolator pierwszego rzędu jest hipotetycznym filtrem lub stacjonarnym układem liniowym, który dokonuje konwersji idealnie spróbkowanego sygnału. W związku z fizyczną niemożliwością wykorzystuje się ekstrapolator pierwszego rzędu z opóźnieniem, którego działanie przedstawiono poniżej



Rys. 3. Ekstrapolator pierwszego rzędu z opóźnieniem [2]

Opis modelami dyskretnymi wybranych procesów fizycznych. Wpływ dyskretyzacji na stabilność.

Metody Eulera

Metoda Eulera wykorzystują możliwość pewnego przybliżenia pochodnej rozpatrywanej funkcji za pomocą jej dyskretnego odpowiednika – przyrostu wartości funkcji. Jeżeli będziemy rozpatrywać różnicę wprzód, to taka pochodna może być aproksymowana jako

$$\dot{x} \approx \frac{x(k+1)-x(k)}{T}. \tag{3}$$

Z drugiej strony, bazując na próbkach które już miały miejsce, możemy zapisać pochodną, wykorzystując różnicę wsteczną, jako następującą aproksymację

$$\dot{x} = \frac{x(k)-x(k-1)}{T}. \tag{4}$$

Takie podejście wykorzystywane jest najczęściej bezpośrednio na równaniach różniczkowych, przekształcając je na równania różnicowe.

W podejściu analitycznym istnieje przekształcenie, pozwalające na przejście pomiędzy opisem pochodnej z wykorzystaniem operatora *s* a opisem przyrostu funkcji z wykorzystaniem operatora *z*. W przypadku różnicy w przód dyskretyzacji można dokonać poprzez podstawienie

$$s = \frac{z-1}{T}, \tag{5}$$

natomiast dla różnicy wstecz

$$s = \frac{z-1}{Tz}. \tag{6}$$

Obie te metody bazują na tzw. metodzie prostokątów – uzasadnienie jej nazwy można znaleźć m.in. na rys.1. W następnym rozdziale omówiona zostanie metoda wykorzystująca aproksymację za pomocą trapezów.

Metoda Tustina

Metoda Tustina wykorzystuje metodę trapezów i jest nieliniowym przekształceniem, dokonywanym za pomocą następującego wzoru

$$s = \frac{2}{T}\frac{(z-1)}{(z+1)}. \tag{7}$$

To właśnie ta biliniowa transformacja przekształca lewą (stabilną) półpłaszczyznę *s* w stabilny obszar okręgu jednostkowego na płaszczyźnie *z*.

Opis modelami dyskretnymi wybranych procesów fizycznych. Wpływ dyskretyzacji na stabilność.

Czynności wstępne

1. Zapoznać się z działaniem i składnią funkcji służących do definiowania transmitancji operatorowych, zarówno w wersji ciągłej jak i dyskretnej (*tf*).

2. Zapoznać się z dokumentacją funkcji c2d (*help c2d*) służącej do konwersji transmitancji ciągłej do jej dyskretnego odpowiednika.

Przebieg ćwiczenia

1. Utworzyć nowy skrypt programu Matlab. Z wykorzystaniem odpowiednich komend upewnić się, że przy każdym nowym wywołaniu skryptu zostaną zamknięte wszystkie otwarte figury oraz usunięte zostaną poprzednie wartości wszystkich zmiennych.

2. Przyporządkować zmiennej *servo* ciągłą transmitancję operatorową, odpowiadającą modelowi serwomechanizmu, zgodnie z poniższym równaniem:

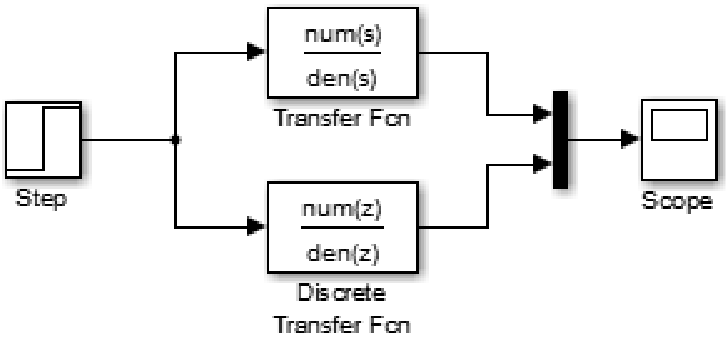
$$G(s) = \frac{1000}{s(s+1)}$$

3. Korzystając z poleceń *bode* oraz *nyquist* sprawdzić podstawowe charakterystyki częstotliwościowe otrzymanego obiektu. Czy taki obiekt ciągły jest stabilny?

4. Dokonać konwersji modelu serwomechanizmu do postaci dyskretnej. W tym celu wykorzystać polecenie c2d, zadeklarować zmienną Ts określającej czas próbkowania – należy nadać jej wartość 0.1. Otrzymany model dyskretny zapisać jako zmienną *dservo=c2d(servo,Ts)*. Uruchomić skrypt, upewnić się, że w przestrzeni roboczej pojawiły się zmienne *servo* oraz *dservo*.

5. Otworzyć przybornik Simulink. Stworzyć nowy model symulacyjny i umieścić w nim oba otrzymane modele serwomechanizmu. W tym celu w oknie poleceń należy wpisać polecenie simulink3, stworzyć nowy model symulacyjny i zapisać go. Z biblioteki Continuous wybrać blok Transfer Fcn i umieścić go w środowisku symulacyjnym. Podobne czynności wykonać dla dyskretnego odpowiednika transmitancji ciągłej. Ustawić czas trwania symulacji na 10s.

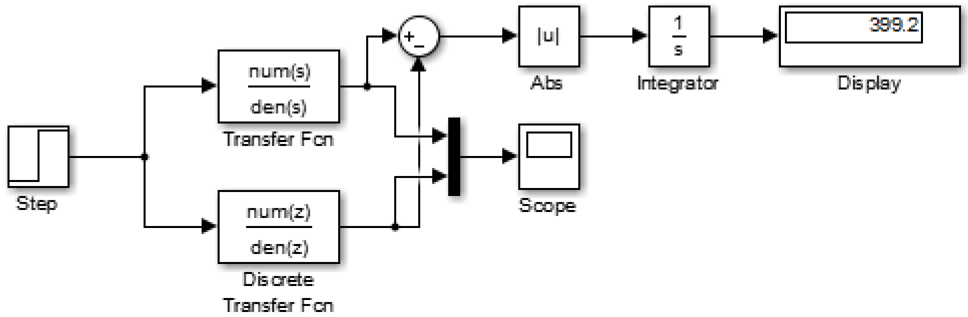
6. Wpisać odpowiednie parametry w bloki stworzonych transmitancji. Wykorzystać w tym celu składnie .num{:} oraz .den{:}. Zwrócić uwagę, aby w czasie próbkowania obiektu dyskretnego znalazł się parametr Ts, zadeklarowany w punkcie 4. Porównać odpowiedzi obu modeli na skok jednostkowy.



Opis modelami dyskretnymi wybranych procesów fizycznych. Wpływ dyskretyzacji na stabilność.

7. W skrypcie zmodyfikować metodę dyskretyzacji modelu. W komendzie c2d wprowadzić dodatkowy argument odpowiadający za wybór metody. Porównać wizualnie przebiegi otrzymywane dla różnych metod dyskretyzacji. W celu sprawdzenia dostępnych metod wywołać polecenie *help c2d*.

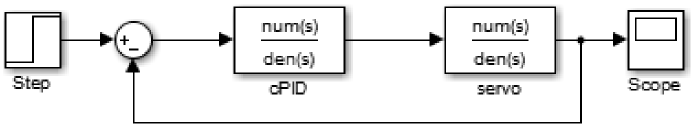
8. W celu dokonania wymiernej oceny jakości rozbudować model o moduł zliczający sumaryczną wartość bezwzględną różnic pomiędzy odpowiedzią ciągłą i dyskretną.



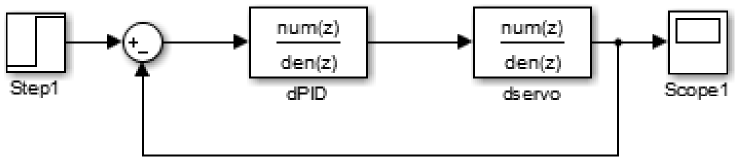
9. Uruchomić skrypt oraz model dla każdej z metod dyskretyzacji. Otrzymane wyniki zestawić w tabeli. Która metoda zwróciła najniższą wartość błędu? Sprawdzić wpływ czasu próbkowania *Ts* na zachowanie wskaźnika jakości.

10. Zadeklarować w skrypcie regulator dla obiektu ciągłego. W tym celu leży skorzystać z polecenia *pid*, ustawić jednostkowe wzmocnienie członu proporcjonalnego. Uzyskany regulator przekształcić do formy transmitancji operatorowej za pomocą polecenia *tf* i zapisać jako *cPID*.

11. Zmodyfikować układ rozdzielając układy dyskretny i ciągły. Wykonać układ regulacji automatycznej z wykorzystaniem regulatora PID dla układu ciągłego. Regulator należy przedstawić w formie transmitancyjnej, podobnie jak zostało to wykonane w punkcie 6.



12. Stworzyć dyskretny odpowiednik regulatora ciągłego, analogicznie do polecenia z punktu 4.

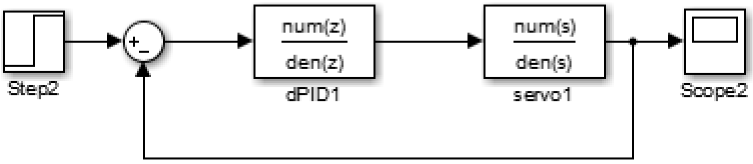


Zwrócić szczególną uwagę na zastosowany czas i metodę próbkowania – powinny one być takie same w modelu serwomechanizmu i regulatorze. Zaobserwuj działanie obu regulatorów.

Opis modelami dyskretnymi wybranych procesów fizycznych. Wpływ dyskretyzacji na stabilność.

13. Przeanalizować działanie dyskretnego układu regulacji dla różnych czasów i metod dyskretyzacji. Analogicznie do punktu 8 dokonaj oceny jakości regulacji w zależności od metody dyskretyzacji.

14. Stworzyć bardzo często spotykany rodzaj układu regulacji – taki system, w którym za nadzorowanie obiektu o charakterze ciągłym odpowiedzialny jest cyfrowy (dyskretny) regulator. W tym celu połączyć składowe elementy z dwóch utworzonych układów.



15. Przeanalizuj wpływ czasu próbkowania na stabilność układu regulacji. Dla jakich wartości czasu próbkowania układ regulacji przestaje być stabilny?

Zadania dodatkowe

1. W ćwiczeniu wykonano zarówno model ciągły jak i dyskretny serwomechanizmu. Dokonaj analizy częstotliwościowej odpowiedzi skokowej obu modelów. Należy wykonać transformatę Fouriera na ciągłym i dyskretnym sygnale odpowiedzi skokowej i porównać widma tych sygnałów. Czy istnieje graniczna wartość czasu próbkowania, dla których widma te pokrywają się?

2. Uzupełnić układ regulacji o człony różniczkujący oraz całkujący. Zbadać czy dla takich układów mają miejsce podobne zjawiska, jak w przypadku regulacji z użyciem samego członu proporcjonalnego.

Literatura

[1] Horla D. Podstawy Automatyki, ćwiczenia laboratoryjne, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2015.

[2] Wikipedia: https://pl.wikipedia.org/wiki/Dyskretyzacja_(matematyka), dostęp: 2021.