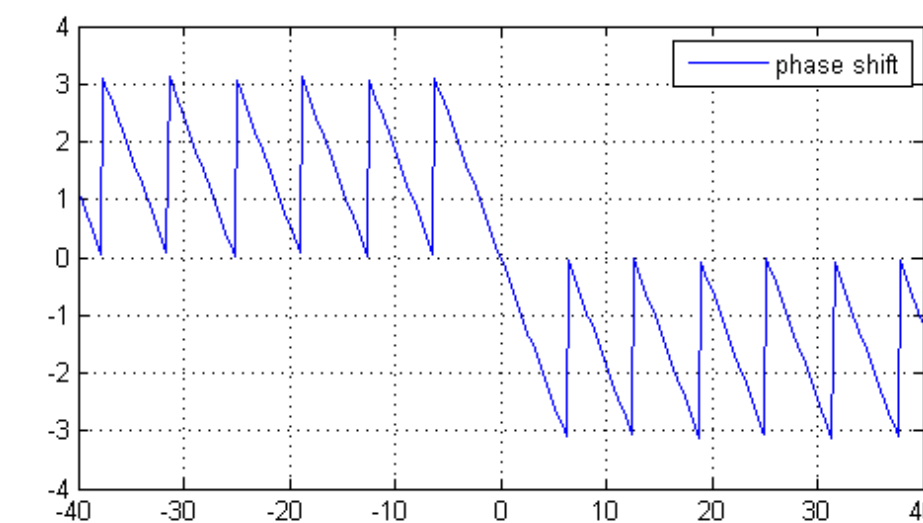
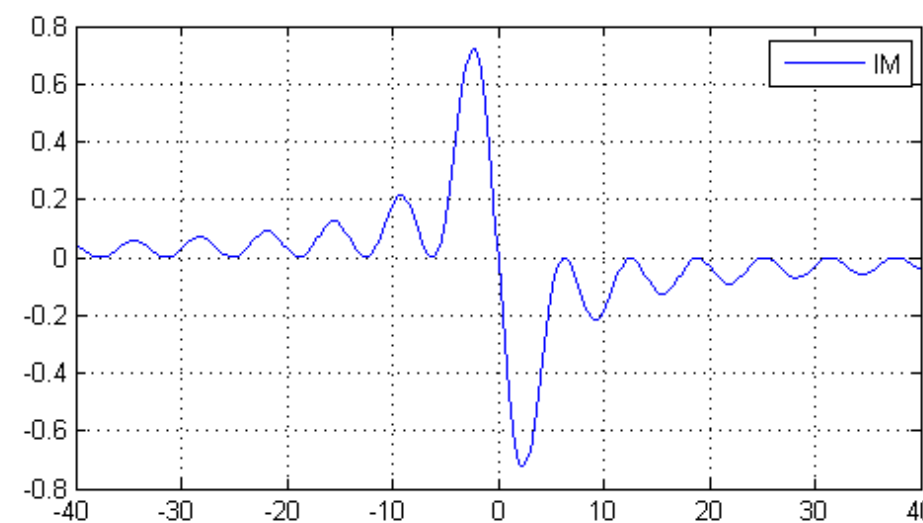
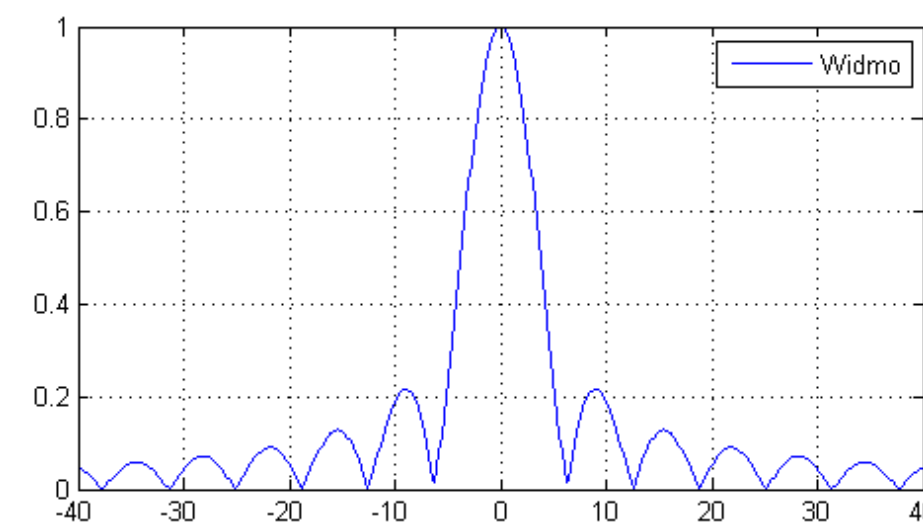
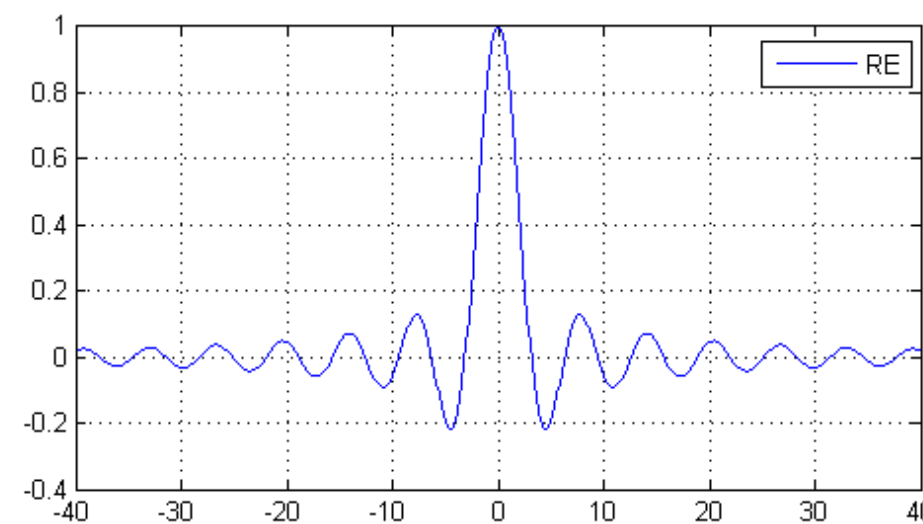


Charakterystyki częstotliwościowe

linowych obiektów stacjonarnych

Transformata Fouriera



Transformacja Fouriera dokonuje przejścia między dziedziną czasu a dziedziną zespolonej pulsacji:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Dzięki takiej transformacji otrzymujemy amplitudy sygnałów o kolejnych wielokrotnościach częstotliwości bazowej

Fourier vs. Laplace

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i(\sin \omega t)$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

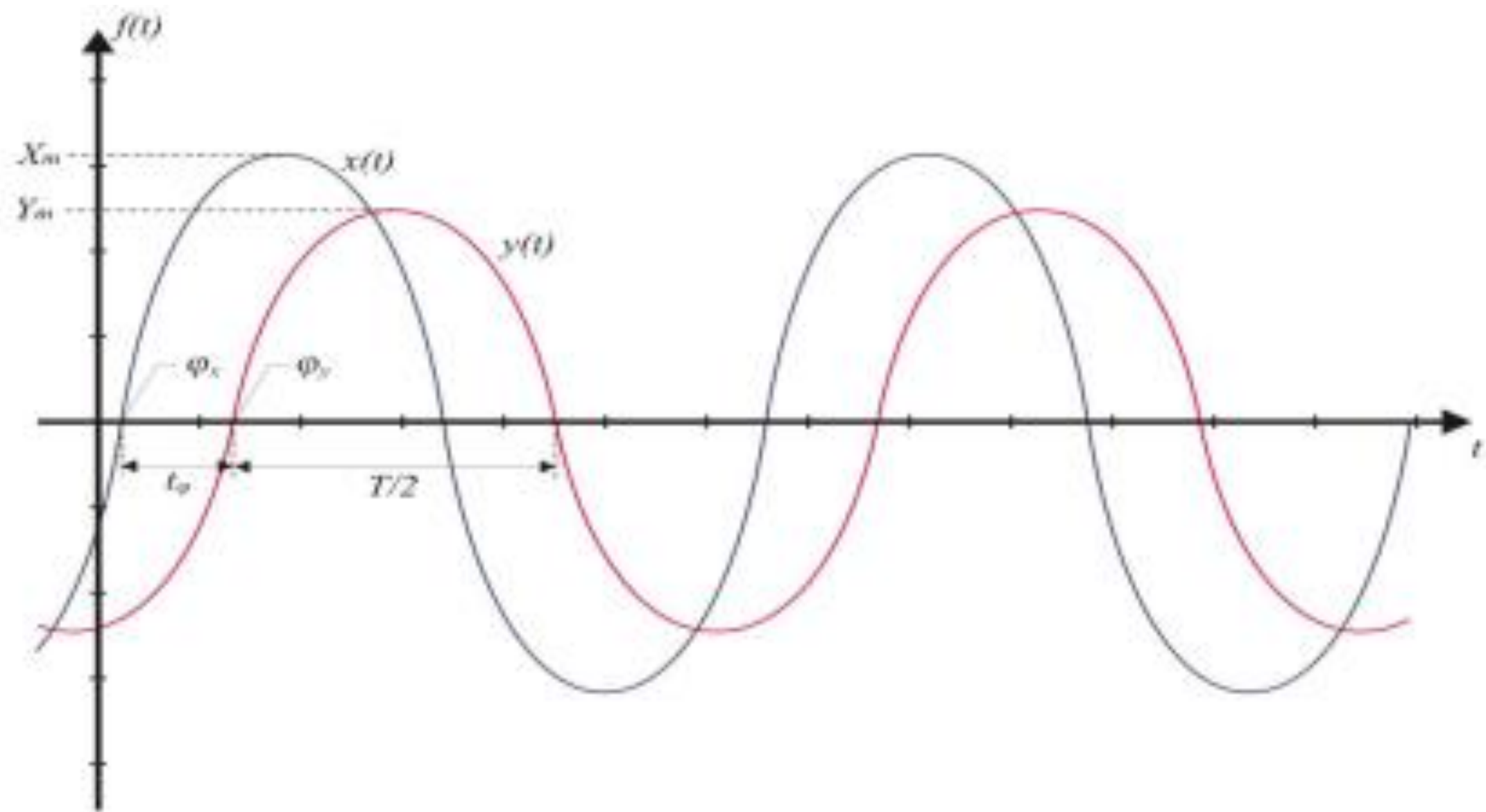
$$s = \sigma + j\omega$$

Wychwycenie występowania składowych o różnych częstotliwościach

Służy głównie do opisu sygnałów

Służy głównie do opisu systemów (obiektów)

Charakterystyki częstotliwościowe



Charakterystyki częstotliwościowe to takie charakterystyki, które ukazują zależności pomiędzy częstotliwością sygnału wejściowego a charakterem sygnału wyjściowego.

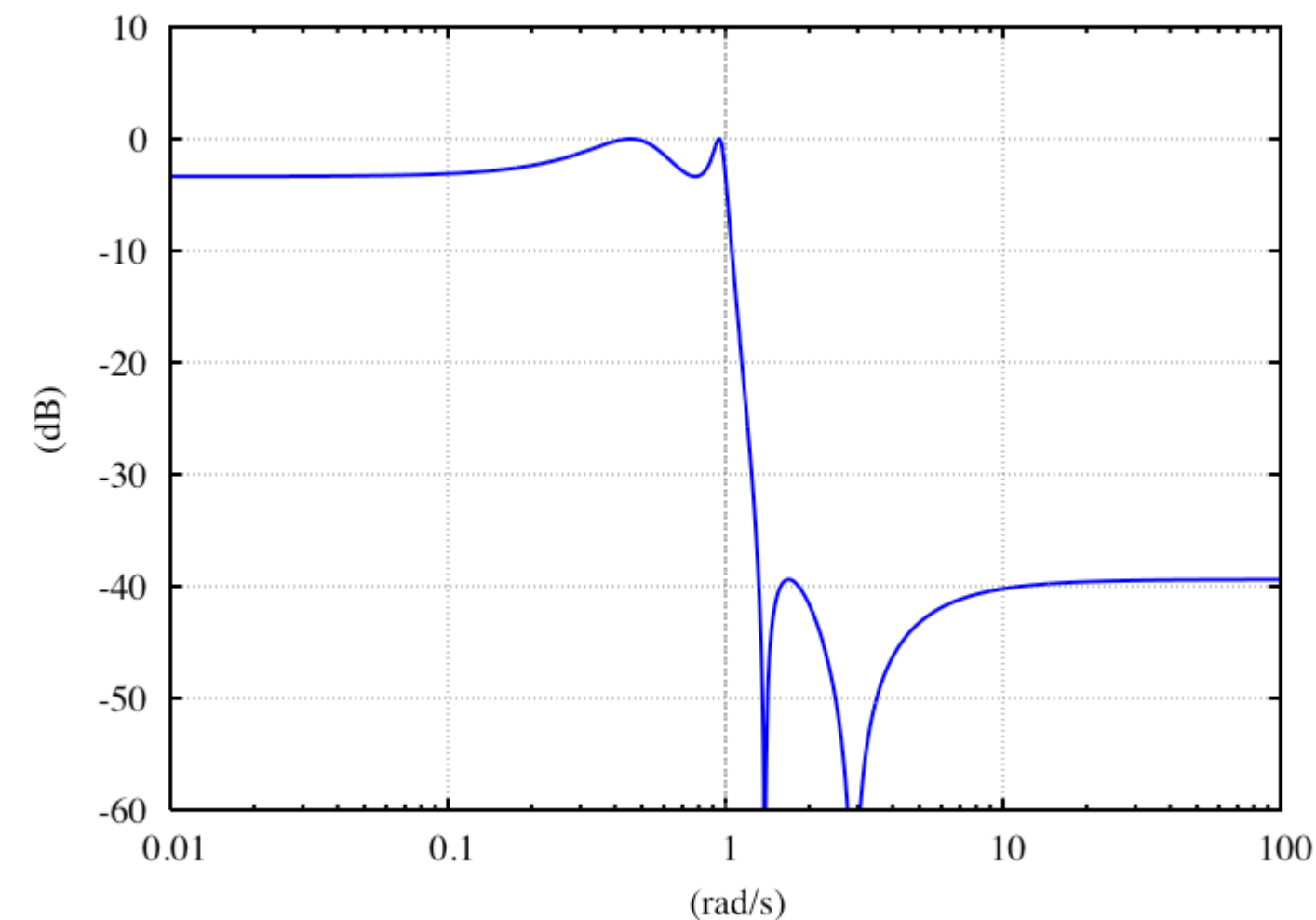
$$G(j\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Uzyskanie takich charakterystyk jest możliwe dzięki transmitancji widmowej

Charakterystyki częstotliwościowe

Charakterystyka amplitudowa

Charakterystyka amplitudowa – w elektronice oraz przetwarzaniu sygnałów, wykres modułu zespolonej transmitancji widmowej układu LTI (np. wzmacniacza albo filtra) w funkcji częstotliwości lub pulsacji.

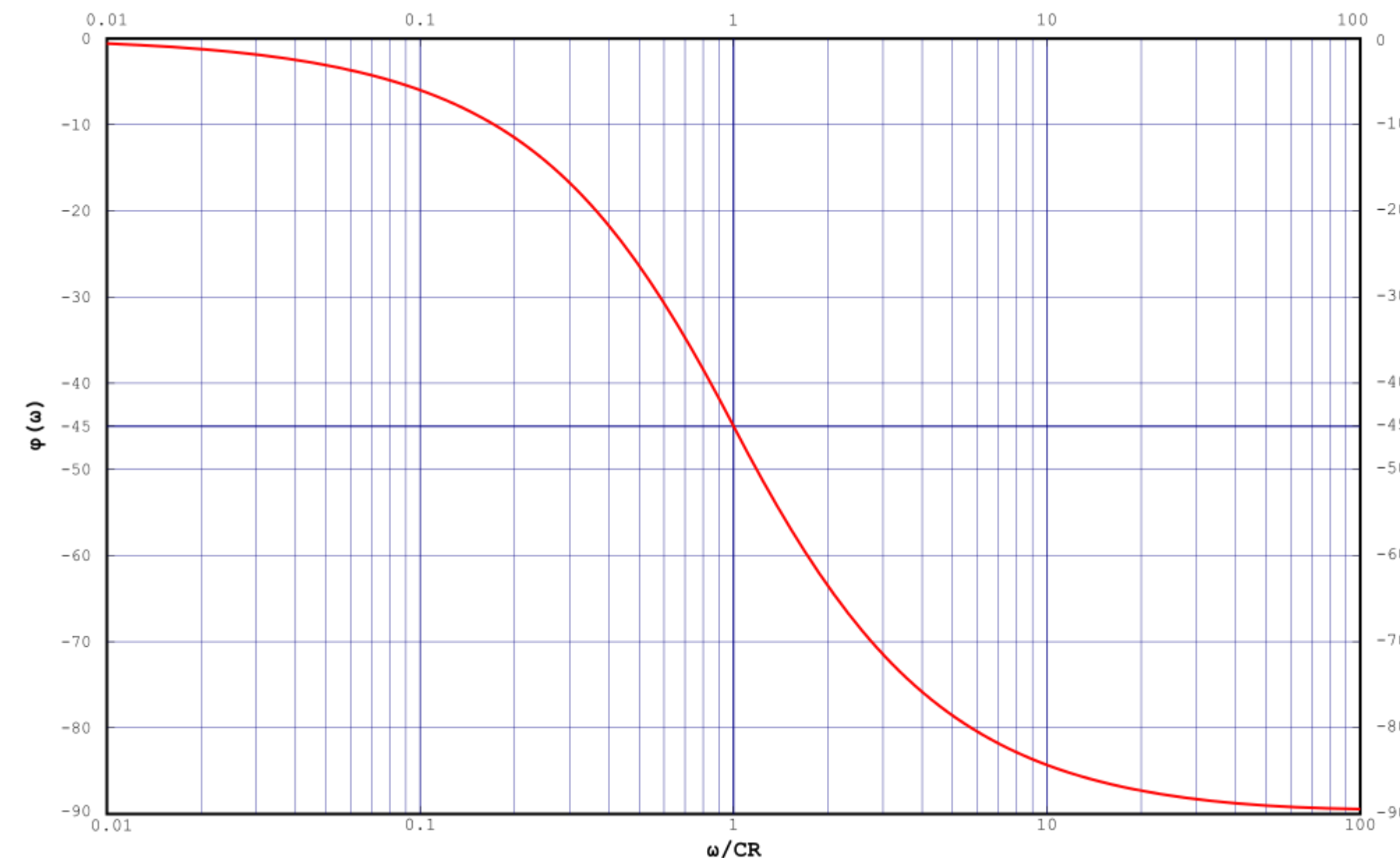


Charakterystyka amplitudowa pokazuje jak układ wzmacnia lub tłumi określone składowe widmowe sygnału w zależności od ich częstotliwości.

Charakterystyki częstotliwościowe

Charakterystyka fazowa

Charakterystyka fazowa w elektronice oraz przetwarzaniu sygnałów, to wykres argumentu zespolonej transmitancji widmowej układu LTI (np. wzmacniacza lub filtru) w funkcji częstotliwości lub pulsacji.



Charakterystyka fazowa obrazuje, jak układ zmienia widmo fazowe sygnału, który przez niego przechodzi. Inaczej mówiąc, charakterystyka fazowa pokazuje jak układ zmienia fazę poszczególnych składowych widmowych sygnału w zależności od ich częstotliwości

Charakterystyki Bodego

Charakterystyki częstotliwościowe Charakterystyki Bodego

Charakterystyka częstotliwościowa logarytmiczna – w teorii sterowania jedna z najważniejszych charakterystyk częstotliwościowych układu regulacji. Wyznacza się ją dla układu opisanego transmitancją widmową.

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

$$|G(j\omega)| = M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

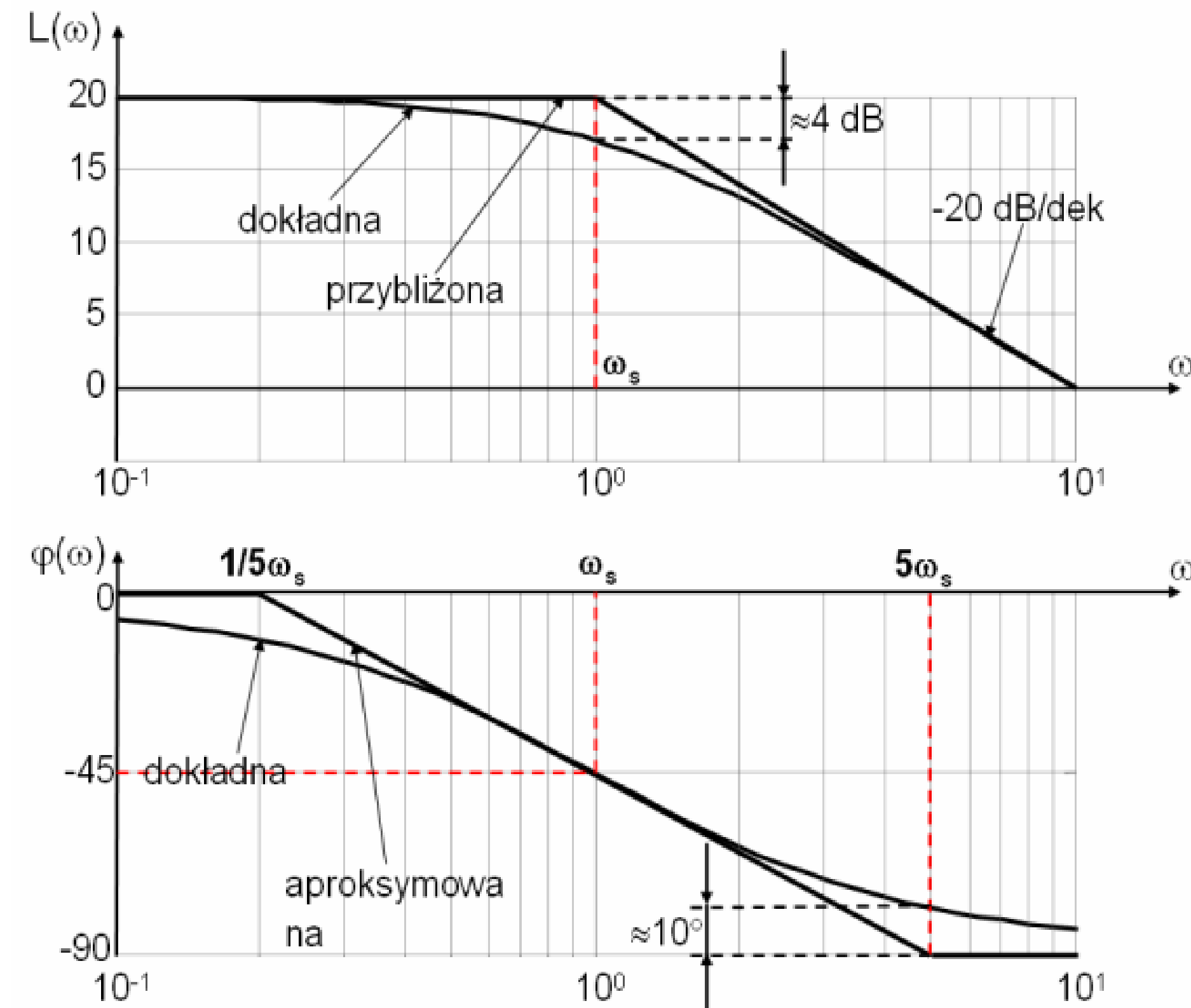
$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \operatorname{arctg}\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right)$$

Charakterystyki częstotliwościowe Charakterystyki Bodego

$$|G(j\omega)| = M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$L(\omega) = 20 \log M(\omega)$$

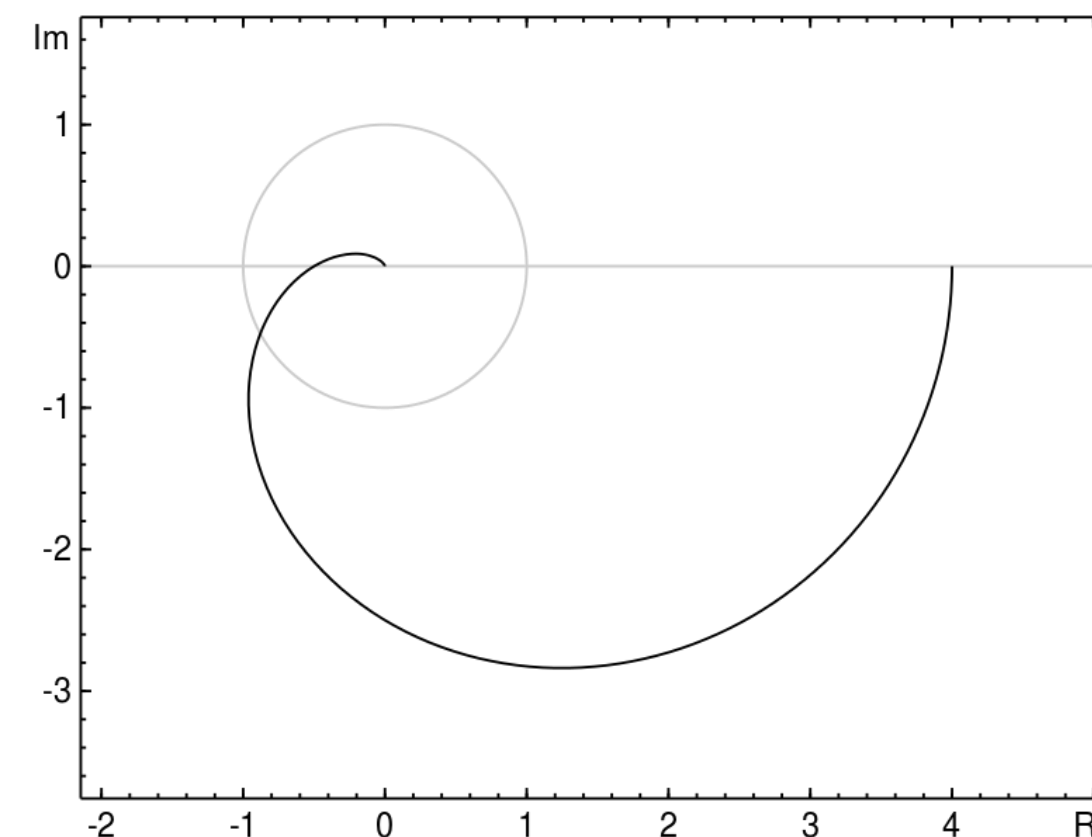
$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \operatorname{arctg} \left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right)$$



Charakterystyki Nyquista

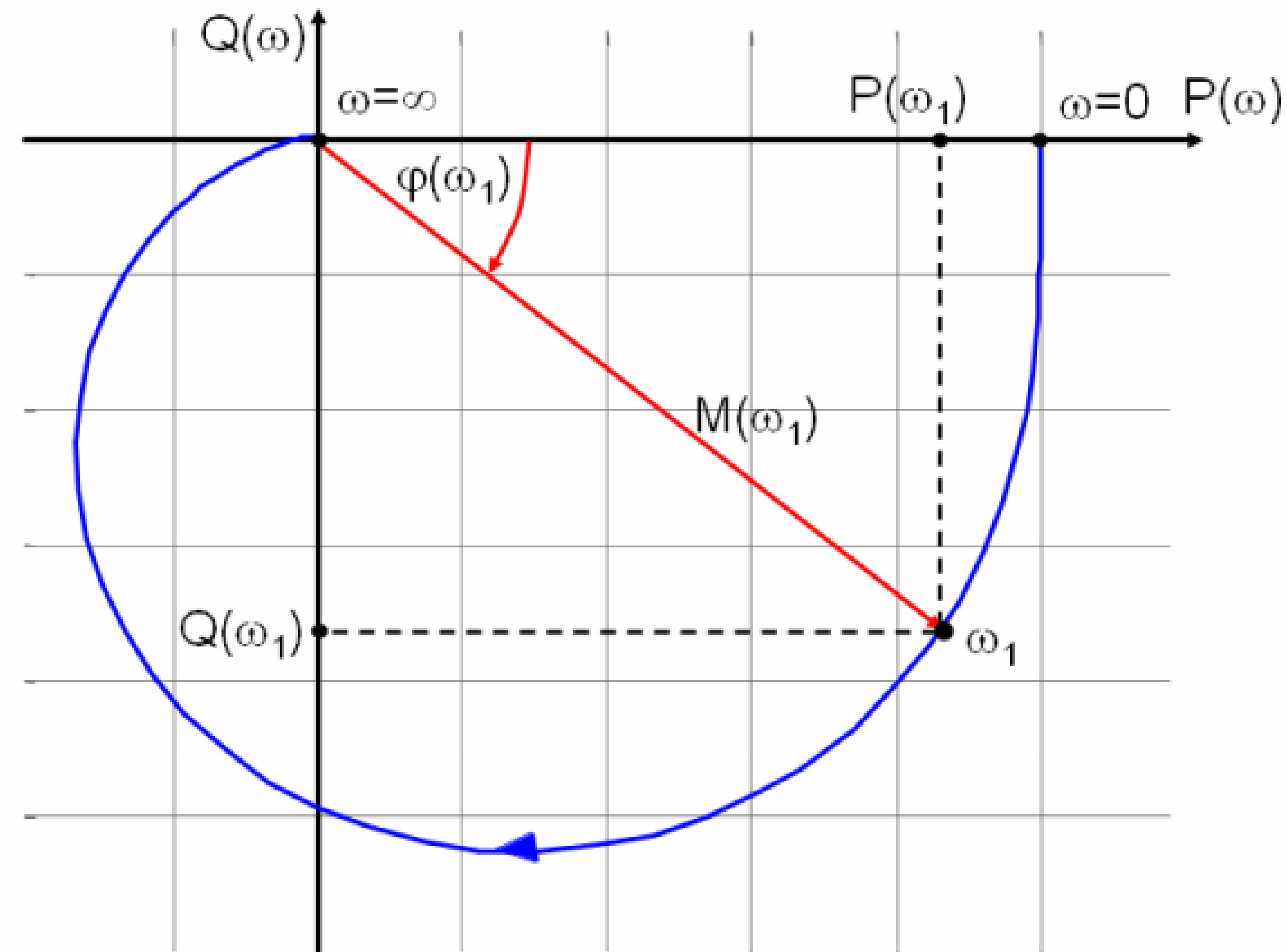
Charakterystyka Nyquista

Charakterystyka amplitudowo-fazowa, charakterystyka Nyquista, wykres Nyquista – w automatyce, wykres transmitancji widmowej układu na płaszczyźnie zmiennej zespolonej.



Można ją wyznaczyć doświadczalnie, dokonując pomiarów (w stanie ustalonym) amplitudy oraz przesunięcia fazowego sygnału wyjściowego układu, gdy sygnałem wejściowym jest sygnał sinusoidalny o stałej amplitudzie i częstotliwości. Na wykresie umieszcza się punkty odpowiadające wartościom transmitancji widmowej dla kolejnych wartości. Wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej układu realizowalnego fizycznie dąży do początku układu współrzędnych.

Charakterystyka Nyquista



Wyznaczanie charakterystyk

Wyznaczanie charakterystyk

1. Wyznaczenie transmitancji operatorowej
2. Wykonanie podstawienia $s = \omega j$
3. Wyznaczenie $\text{Re}(G(j\omega))$ oraz $\text{Im}(G(j\omega))$ -najczęściej poprzez pomnożenie przez sprzężenie mianownika
4. Wyznaczenie $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ przynajmniej dla $\omega=0$, $\omega=\omega_s$, $\omega=+\infty$
5. Wykreślenie charakterystyki amplitudowo –częstotliwościowej
6. Wyznaczenie $M(\omega)$ oraz $L(\omega)$
7. Wyznaczenie zakresów przybliżeń ($\omega \ll \omega_s$, $\omega \gg \omega_s$) i odpowiednich wzorów $L(\omega)$ dla nich
8. Obliczenie spadku na dekadę dla obydwóch zakresów
9. Wyznaczenie wartości $L(\omega)$ dla jednej wartości ω z pierwszego zakresu i jednej z drugiego (mogą być punkty przecięcia z osiami)
10. Wykreślenie logarytmicznej charakterystyki amplitudowej
11. Wyznaczenie wzoru na $\varphi(\omega)$
12. Wyznaczenie $\varphi(\omega)$ przynajmniej dla $\omega=0$, $\omega=\omega_s$, $\omega=+\infty$
13. Wykreślenie logarytmicznej charakterystyki fazowej

Przykład I

Przykład I

$$G(s) = \frac{3}{s+5}$$

$$G(j\omega) = \frac{3}{j\omega+5}$$

$$G(j\omega) = \frac{3}{j\omega+5} \cdot \frac{5-j\omega}{5-j\omega} = \frac{15-3j\omega}{25-j^2\omega^2} = \frac{15-3j\omega}{25+\omega^2}$$

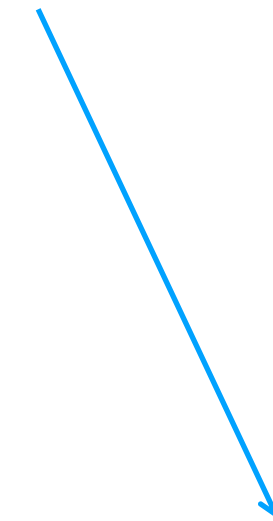
1. Wyznaczenie transmitancji operatorowej
2. Wykonanie podstawienia $s = \omega j$
3. Wyznaczenie $\text{Re}(G(j\omega))$ oraz $\text{Im}(G(j\omega))$ -najczęściej poprzez pomnożenie przez sprzężenie mianownika

$$P(\omega) = \frac{15}{25+\omega^2}$$

$$Q(\omega) = -\frac{3\omega}{25+\omega^2}$$

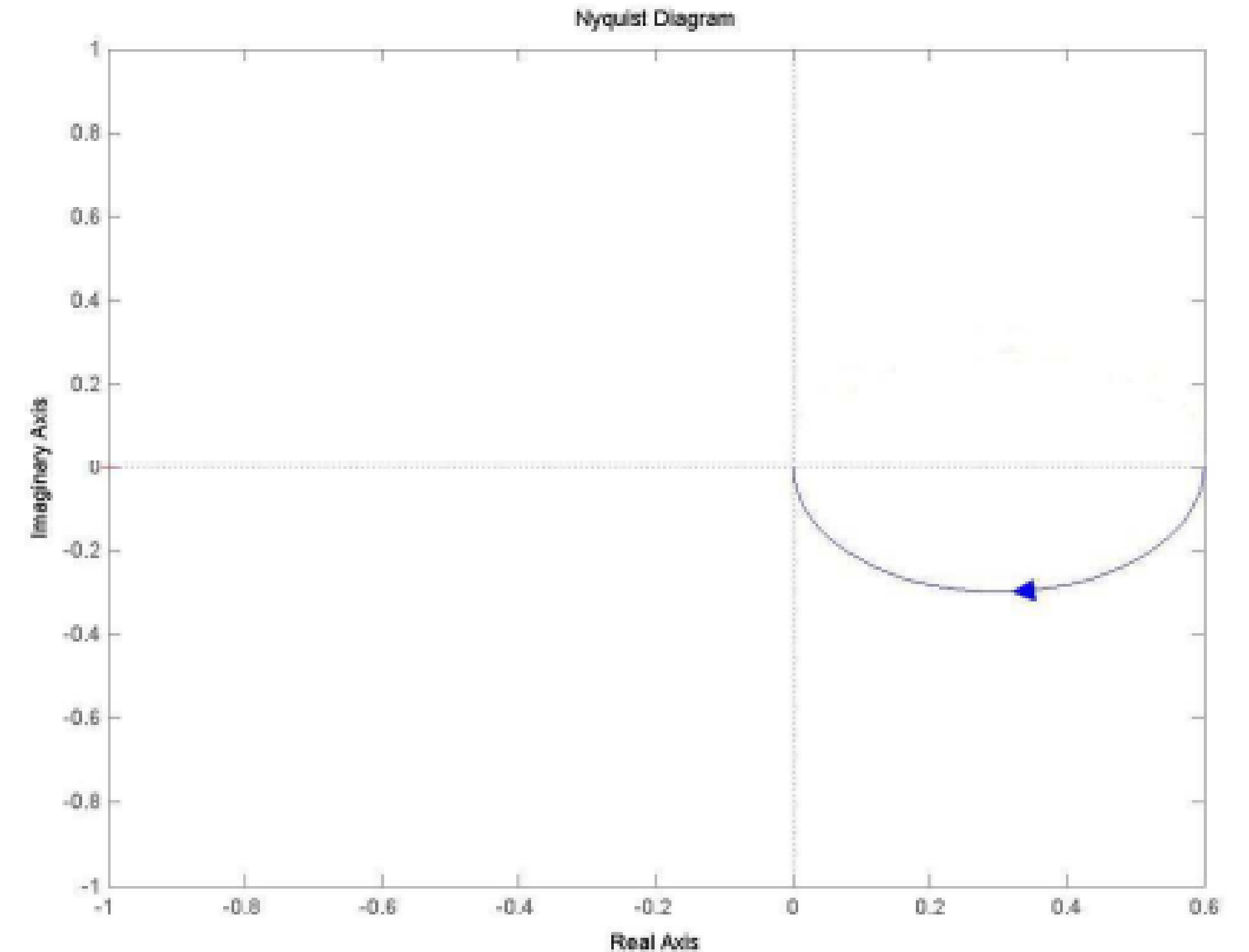
Przykład I

$$G(s) = \frac{3}{s + 5}$$



Wykonano tabelę argumentów:

ω	0,	5	$+\infty$
$P(\omega)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	0
$Q(\omega)$	0	$-\frac{3}{10}$	0



Przykład I

$$M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\frac{15^2}{(25 + \omega^2)^2} + \frac{(3\omega)^2}{(25 + \omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{15^2 + 9\omega^2}{(25 + \omega^2)^2}}$$

$$L(\omega) = 20 \log M(\omega)$$

$$\omega \ll 5$$

$$M(\omega) = \sqrt{\frac{15^2}{25^2}} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$L(\omega) = 20 \log \frac{3}{5}$$

$$\omega \gg 5$$

$$M(\omega) = \sqrt{\frac{9\omega^2}{(\omega^2)^2}} = \frac{3}{\omega}$$

$$L(\omega) = 20 \log \frac{3}{\omega}$$

Przykład I

7. Wyznaczenie zakresów przybliżeń ($\omega \ll \omega_s$, $\omega \gg \omega_s$) i odpowiednich wzorów $L(\omega)$ dla nich
8. Obliczenie spadku na dekadę dla obydwóch zakresów

$$L(10\omega) - L(\omega) = 20[\log M(10\omega) - \log M(\omega)]$$

Czyli dla podanych przybliżeń:

$\omega \ll 5$	$\omega \gg 5$
$L(10\omega) - L(\omega) = 20 \log \frac{3}{5} - 20 \log \frac{3}{5} = 0$ <p>Jest to prosta o równoległa do osi ω</p>	$L(10\omega) - L(\omega) = 20 \log \frac{3}{10\omega} - 20 \log \frac{3}{\omega} =$ $20 \log \frac{3}{10\omega} \frac{\omega}{3} = 20 \log 10^{-1} = -20 \text{dB} / \text{dekadę}$

Przykład I

$$M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \sqrt{\frac{15^2}{(25 + \omega^2)^2} + \frac{(3\omega)^2}{(25 + \omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{15^2 + 9\omega^2}{(25 + \omega^2)^2}}$$

$$L(\omega) = 20 \log M(\omega)$$

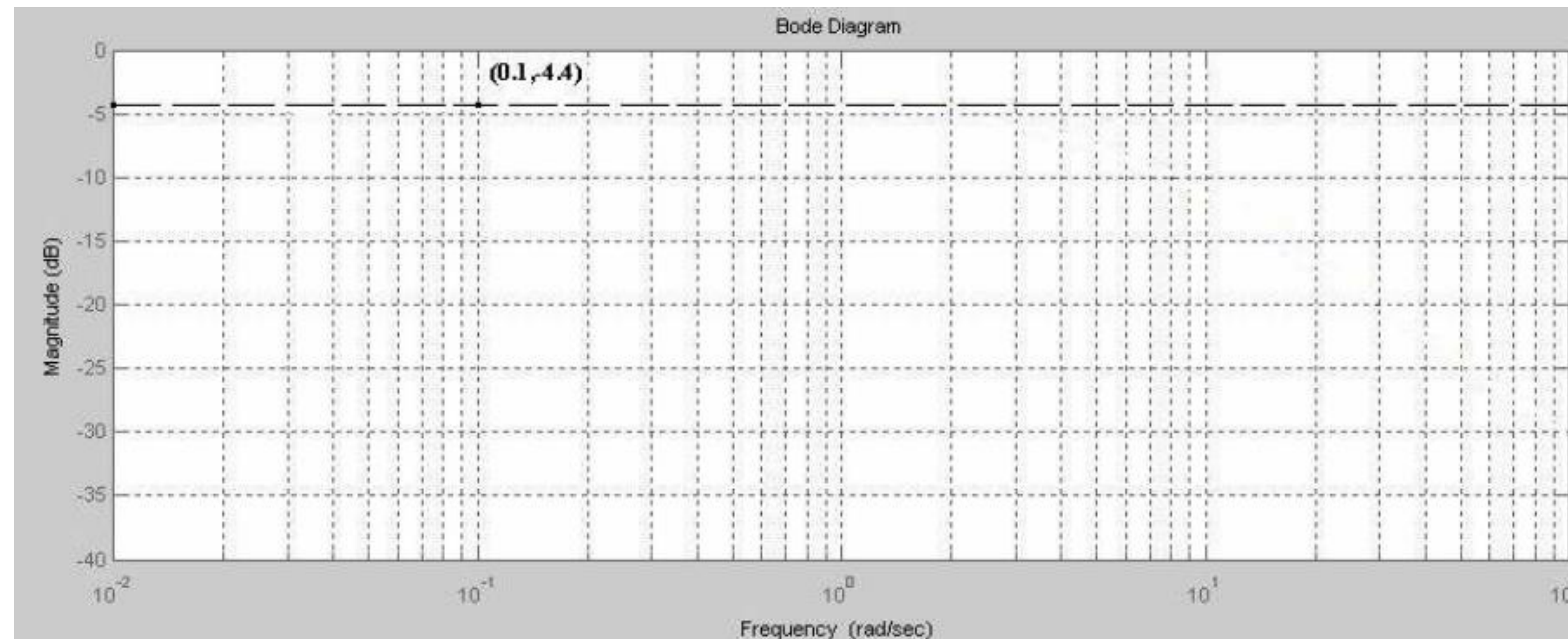
$$\omega \ll 5$$

$$L(10^{-2}) = 20 \log \frac{3}{5} \approx -4.4369$$

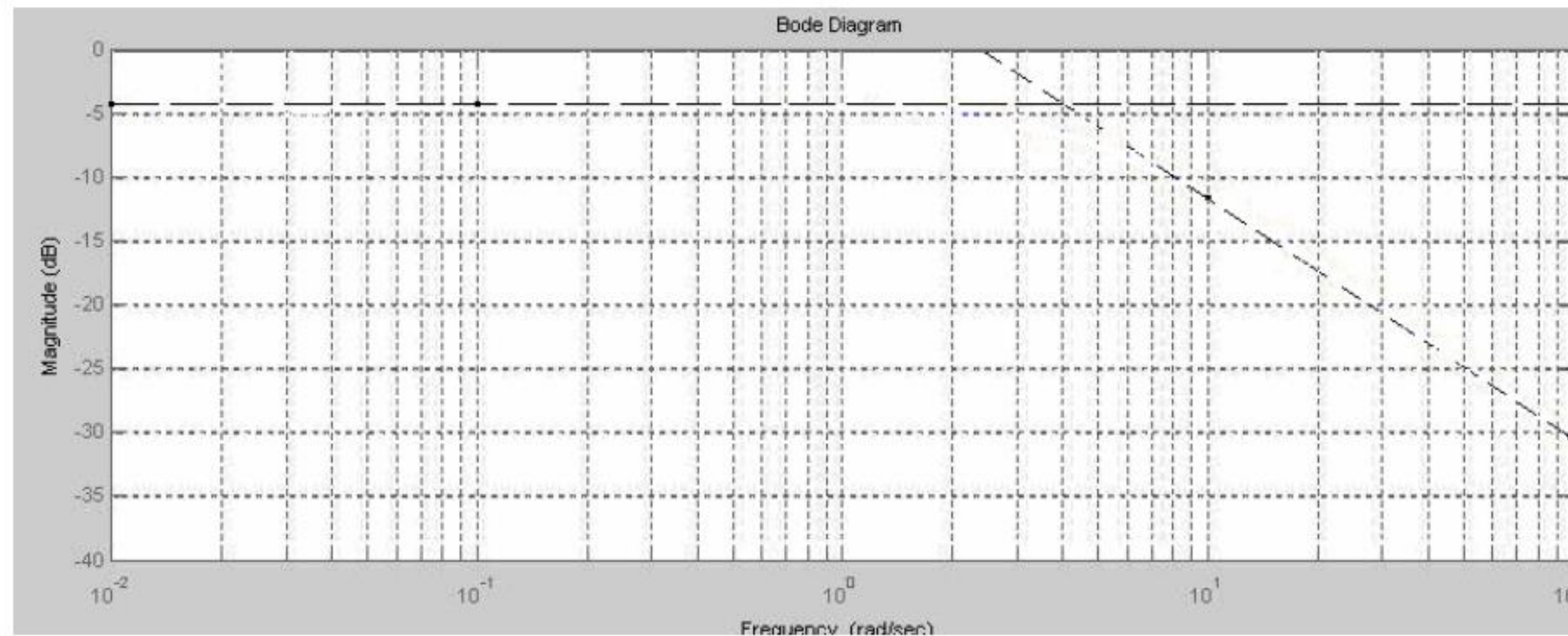
$$\omega \gg 5$$

$$L(10^2) = 20 \log \frac{3}{10^2} = 20 \log 3 - 20 \log 10^2 = 9.54 - 40 = -30.46$$

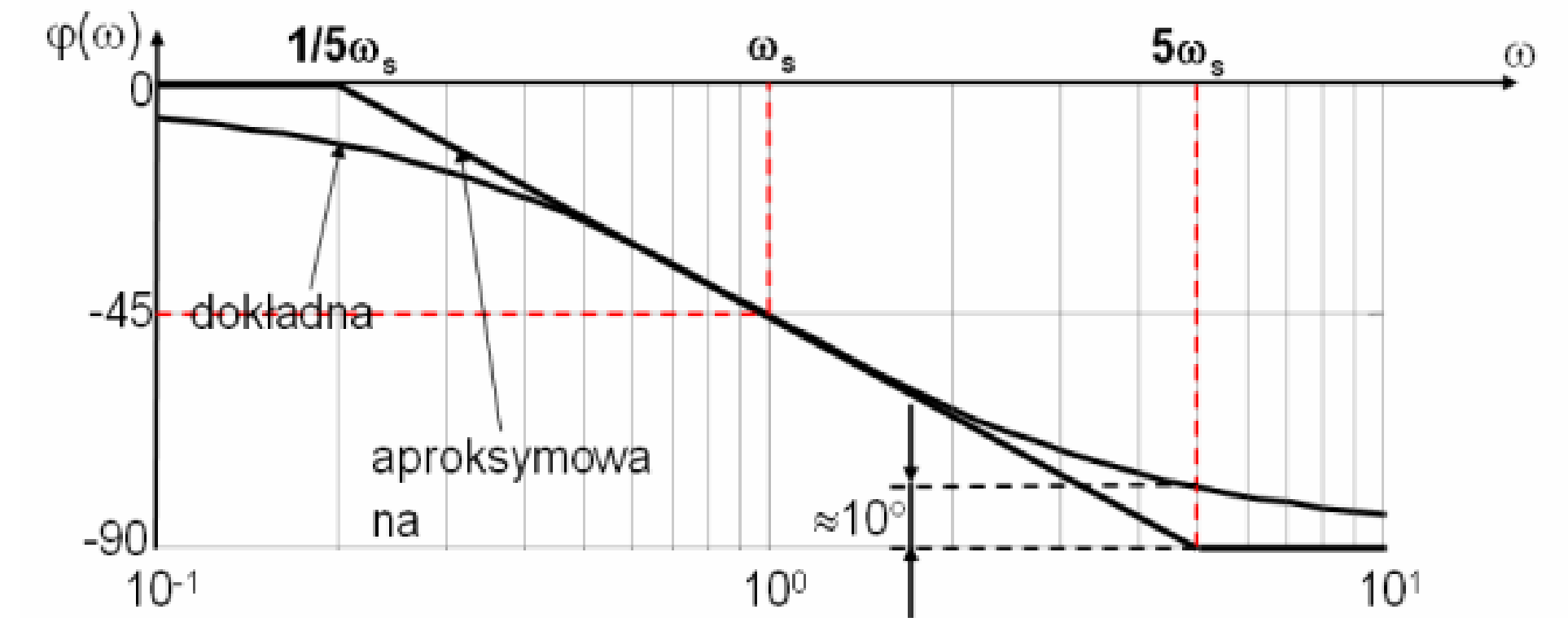
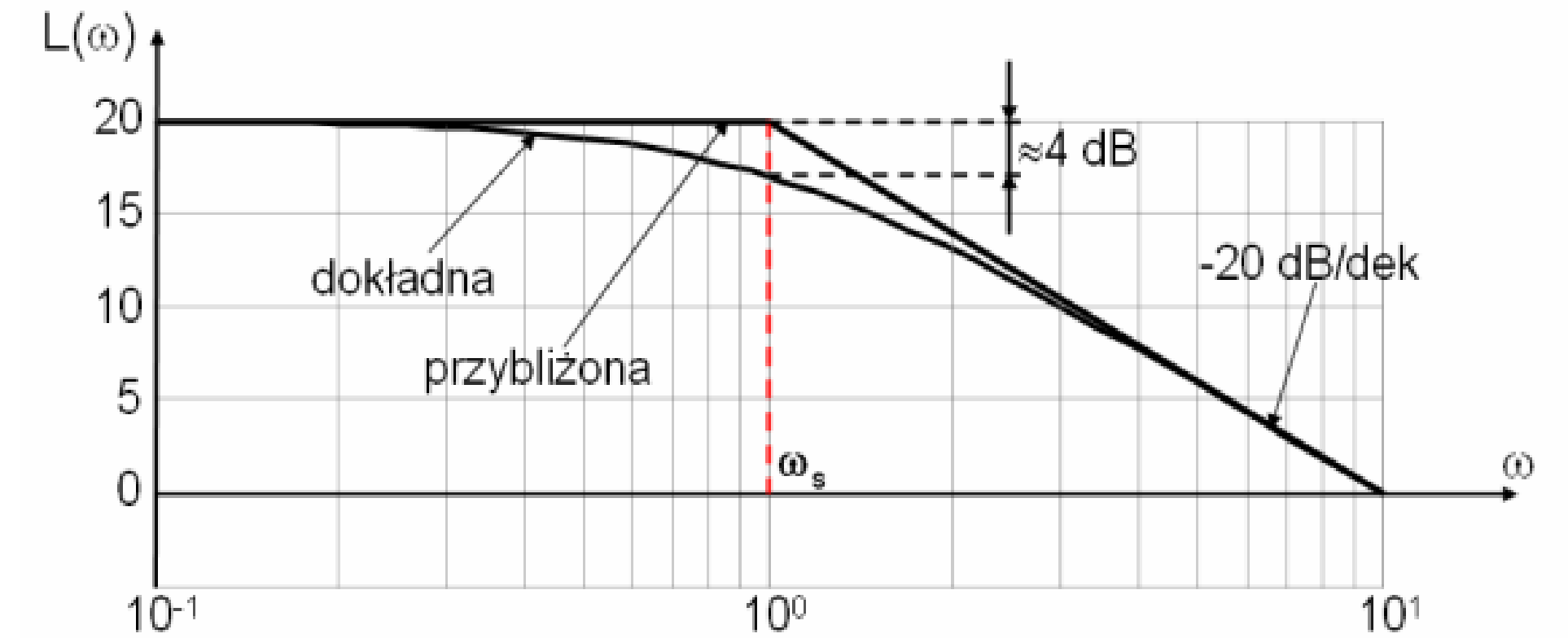
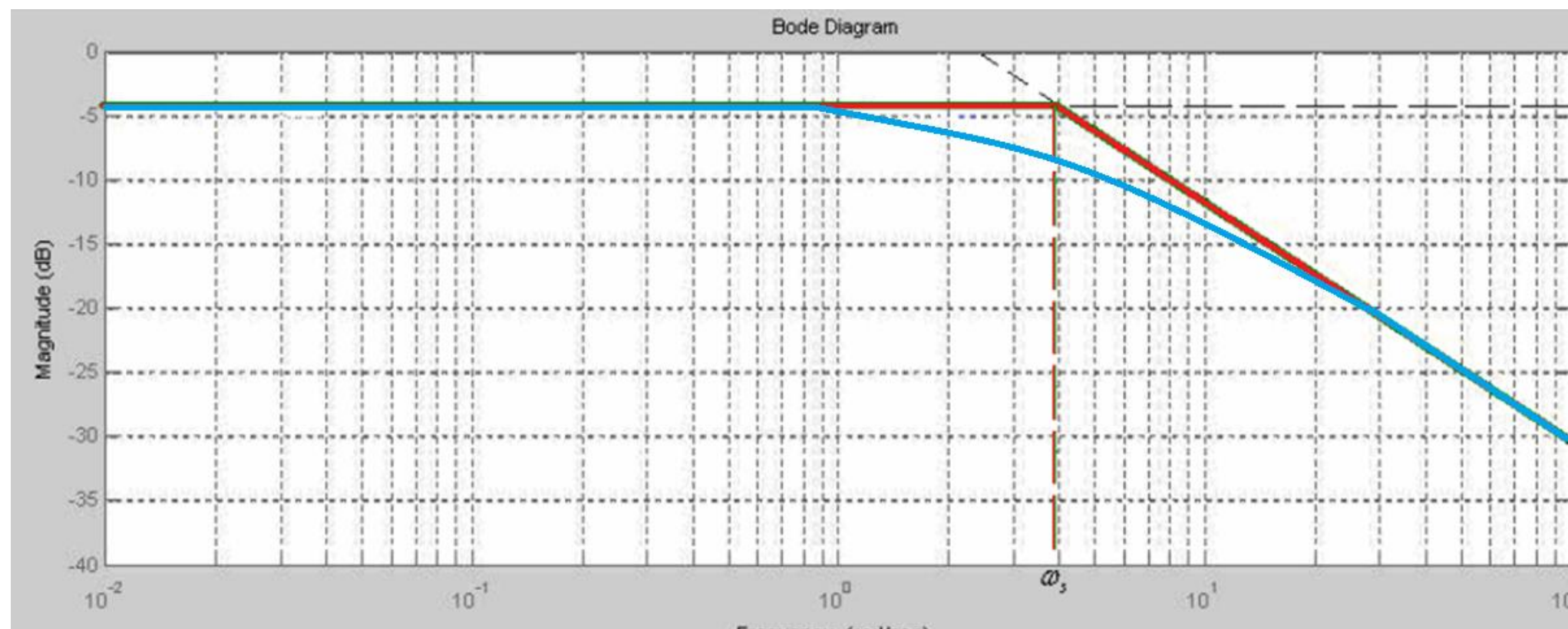
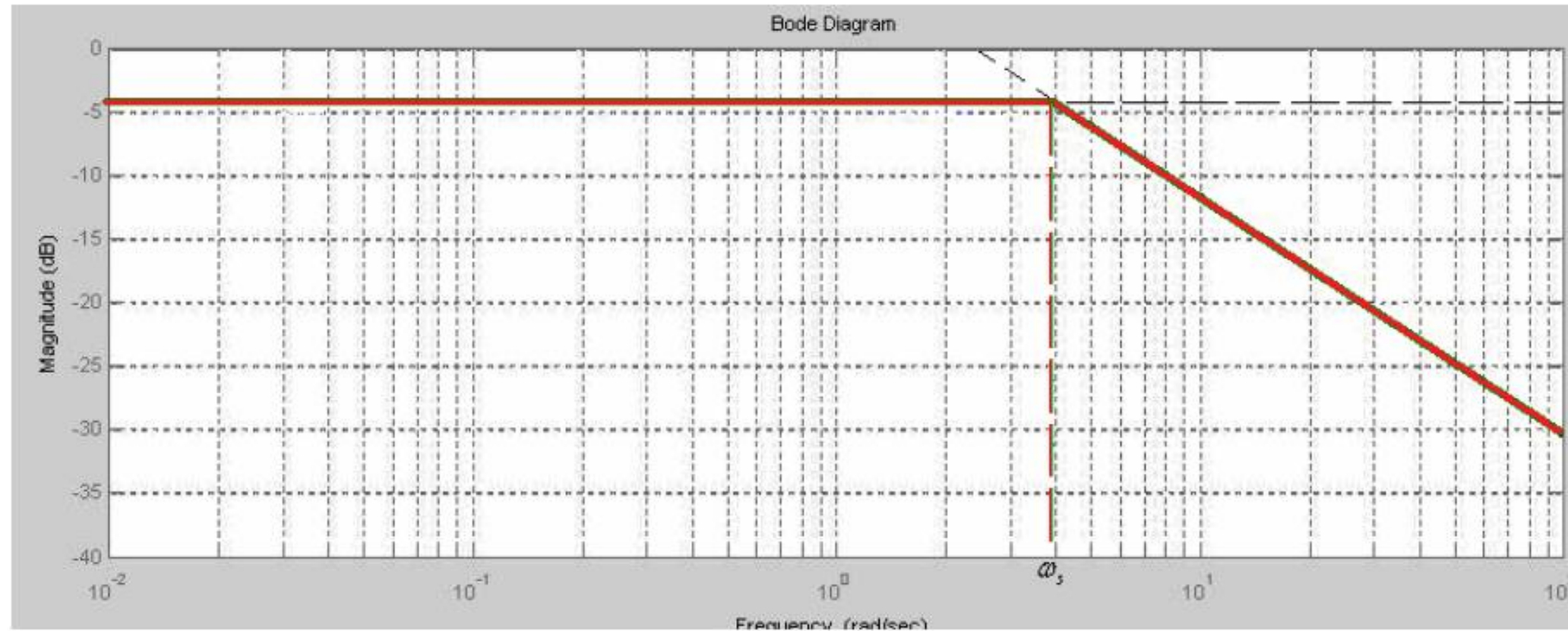
Przykład I



Przykład I



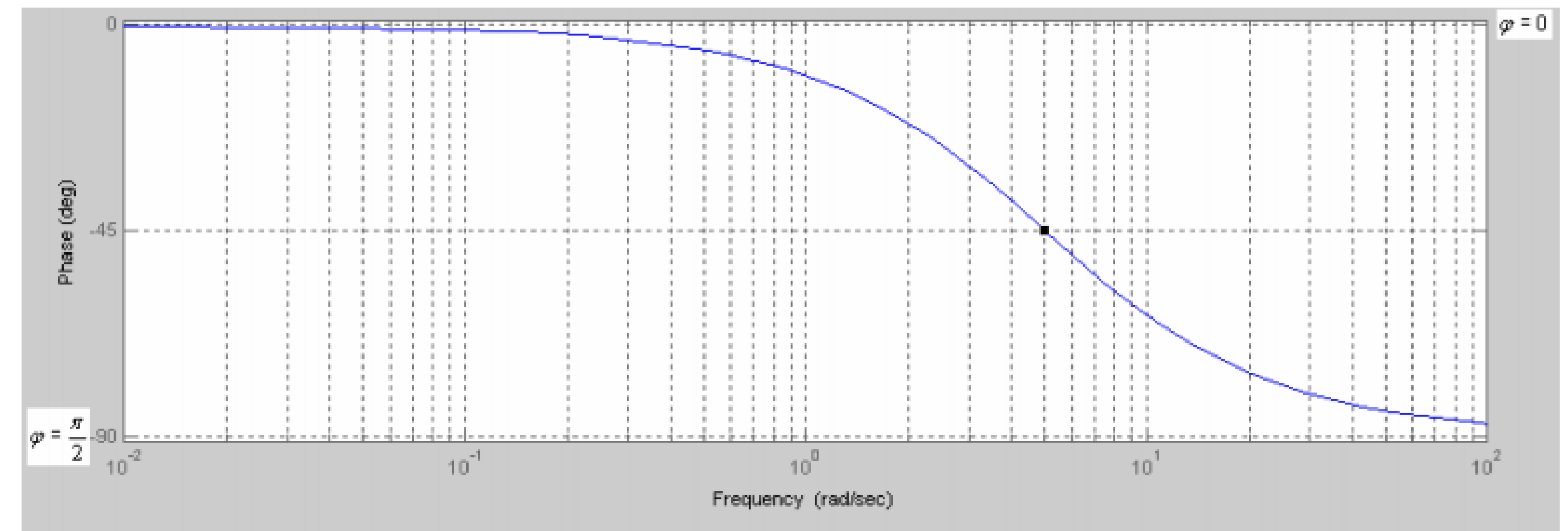
Przykład I



Przykład I

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \text{arc tg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \text{arc tg} \frac{3\omega}{\frac{25 + \omega^2}{15}} = \text{arc tg} -\frac{\omega}{5}$$



ω	0,	5	$+\infty$
$\varphi(\omega)$ [rad]	0	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$

Przykład I

1. Wyznaczenie transmitancji operatorowej
2. Wykonanie podstawienia $s = \omega j$
3. Wyznaczenie $\text{Re}(G(j\omega))$ oraz $\text{Im}(G(j\omega))$ -najczęściej poprzez pomnożenie przez sprzężenie mianownika
4. Wyznaczenie $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ przynajmniej dla $\omega=0$, $\omega=\omega_s$, $\omega=+\infty$
5. Wykreślenie charakterystyki amplitudowo –częstotliwościowej
6. Wyznaczenie $M(\omega)$ oraz $L(\omega)$
7. Wyznaczenie zakresów przybliżeń ($\omega \ll \omega_s$, $\omega \gg \omega_s$) i odpowiednich wzorów $L(\omega)$ dla nich
8. Obliczenie spadku na dekadę dla obydwóch zakresów
9. Wyznaczenie wartości $L(\omega)$ dla jednej wartości ω z pierwszego zakresu i jednej z drugiego (mogą być punkty przecięcia z osiami)
10. Wykreślenie logarytmicznej charakterystyki amplitudowej
11. Wyznaczenie wzoru na $\varphi(\omega)$
12. Wyznaczenie $\varphi(\omega)$ przynajmniej dla $\omega=0$, $\omega=\omega_s$, $\omega=+\infty$
13. Wykreślenie logarytmicznej charakterystyki fazowej

Przykład II

Przykład II

Wyznacz charakterystyki bodego dla obiektu opisanego transmitancją

$$G(s) = \frac{4}{(1 + 3s)}$$

1. Wyznaczenie transmitancji operatorowej
2. Wykonanie podstawienia $s = \omega j$
3. Wyznaczenie $\text{Re}(G(j\omega))$ oraz $\text{Im}(G(j\omega))$ -najczęściej poprzez pomnożenie przez sprzężenie mianownika
4. Wyznaczenie $P(\omega)$ i $Q(\omega)$ przynajmniej dla $\omega=0$, $\omega=\omega_s$, $\omega=+\infty$
5. Wykreślenie charakterystyki amplitudowo –częstotliwościowej
6. Wyznaczenie $M(\omega)$ oraz $L(\omega)$
7. Wyznaczenie zakresów przybliżeń ($\omega \ll \omega_s$, $\omega \gg \omega_s$) i odpowiednich wzorów $L(\omega)$ dla nich
8. Obliczenie spadku na dekadę dla obydwóch zakresów
9. Wyznaczenie wartości $L(\omega)$ dla jednej wartości ω z pierwszego zakresu i jednej z drugiego (mogą być punkty przecięcia z osiami)
10. Wykreślenie logarytmicznej charakterystyki amplitudowej
11. Wyznaczenie wzoru na $\varphi(\omega)$
12. Wyznaczenie $\varphi(\omega)$ przynajmniej dla $\omega=0$, $\omega=\omega_s$, $\omega=+\infty$
13. Wykreślenie logarytmicznej charakterystyki fazowej

Przykład II

Wyznaczenie transmitancji widmowej

$$G(s) = \frac{4}{(1 + 3s)}$$



$$G(j\omega) = \frac{4}{(1 + 3j\omega)}$$

Przykład II

Rozdział na część rzeczywistą i urojoną

$$G(j\omega) = \frac{4}{(1+3j\omega)} \frac{1-3j\omega}{1-3j\omega} = \frac{4-12j\omega}{1+9\omega^2} \longrightarrow \frac{4-12j\omega}{1+9\omega^2} = \frac{4}{1+9\omega^2} - j \frac{12\omega}{1+9\omega^2}$$

Przykład II

Obliczenie wartości dla różnych częstotliwości ω

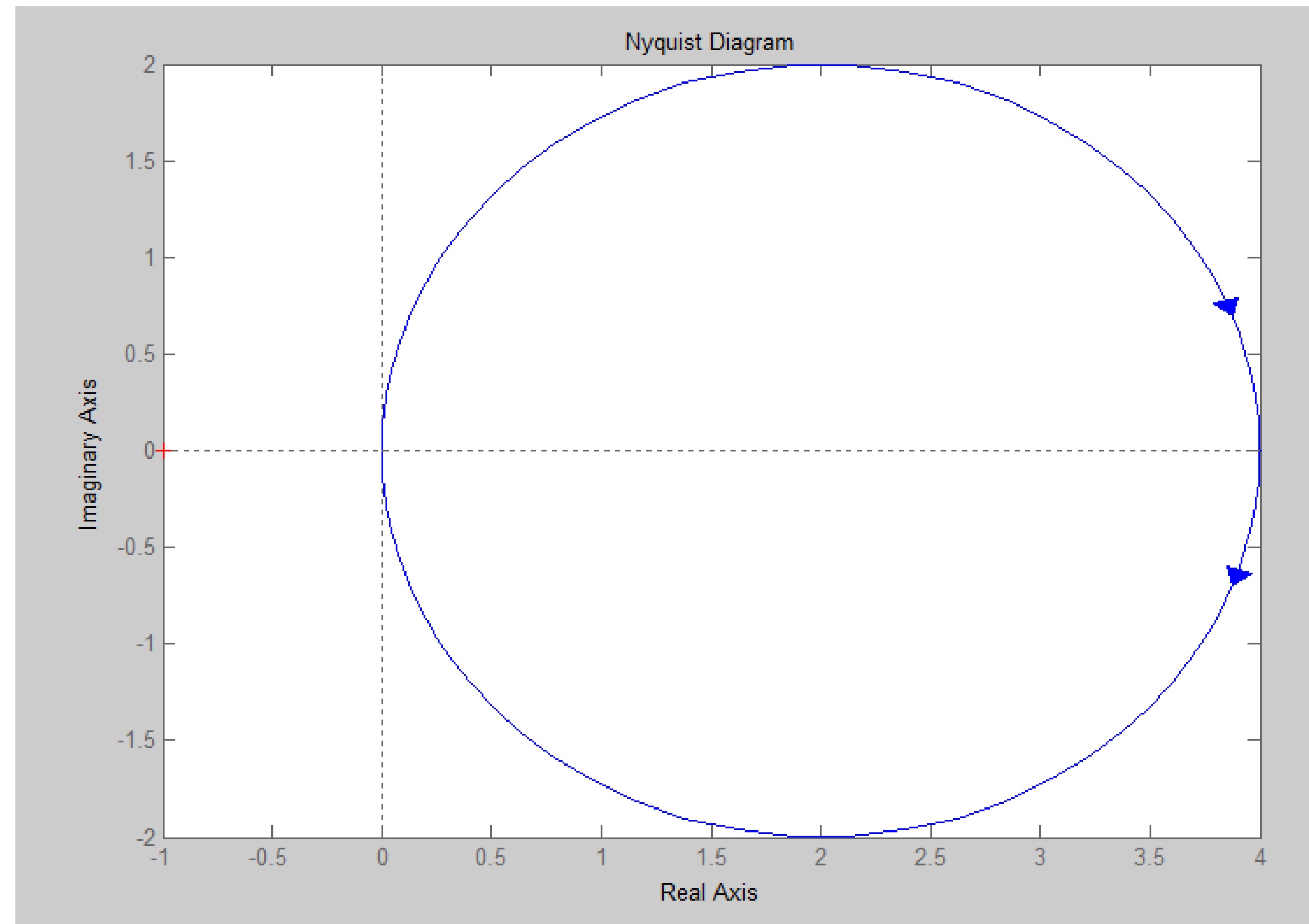
$$G(\omega) = \frac{4}{1+9\omega^2} - j \frac{12\omega}{1+9\omega^2}$$

$$G(0) = \frac{4}{1} - j \frac{0}{1} = 4$$

$$G\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{2} - j \frac{4}{2} = 2 - j2$$

$$G(\infty) = 0 - j0$$

Przykład II



Przykład II

$$G(\omega) = \frac{4}{1+9\omega^2} - j \frac{12\omega}{1+9\omega^2} \qquad M(\omega) = \sqrt{\left(\frac{4}{1+9\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{12\omega}{1+9\omega^2}\right)^2}$$

$$M(\omega) = \sqrt{\left(\frac{4}{1+9\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{12\omega}{1+9\omega^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+144\omega^2}{1+18\omega^2+81\omega^4}}$$

$$\sqrt{\frac{16+144\omega^2}{1+18\omega^2+81\omega^4}}$$

$$\omega \ll \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{\frac{16}{1}}$$

$$\omega \gg \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{\frac{144\omega^2}{18\omega^2+81\omega^4}} = \frac{12\omega}{\sqrt{18\omega^2+81\omega^4}}$$

$$\sqrt{\frac{16}{1}} \quad \Rightarrow \quad \text{Zerowy spadek na dekadę}$$

$$\sqrt{\frac{144\omega^2}{18\omega^2 + 81\omega^4}} = \frac{12\omega}{\sqrt{18\omega^2 + 81\omega^4}} \quad \Rightarrow \quad \text{Przez pierwiastek w mianowniku łatwiej będzie obliczyć spadek na 2 dekady}$$

$$L(10.000\omega) - L(100\omega) = 20 \log \frac{120000\omega}{100\sqrt{18\omega^2 + 81\omega^4}} - 20 \log \frac{1200\omega}{10\sqrt{18\omega^2 + 81\omega^4}} = 20 \log 100 = 40 \text{ db}/2\text{dek} = 20 \text{ db}/\text{dek}$$

$$\omega \ll \frac{1}{3}$$

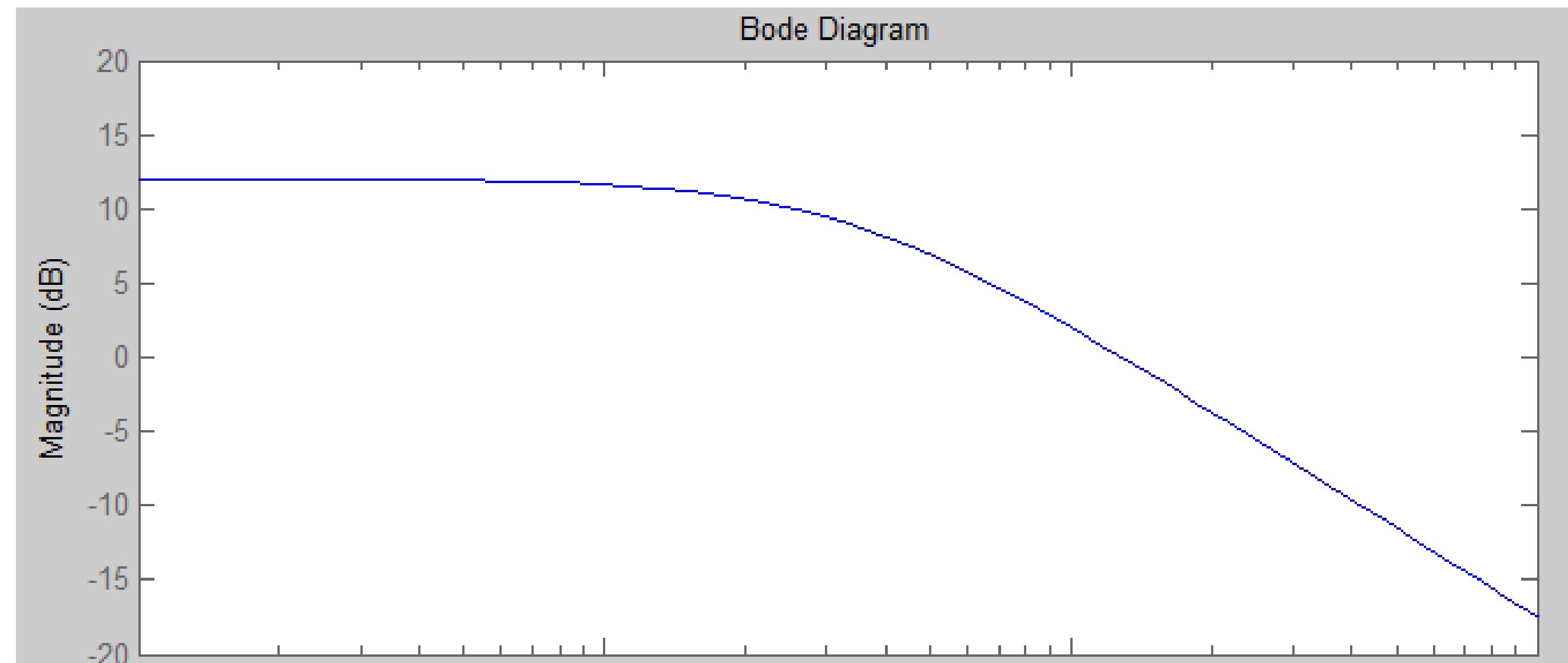
$$M(\omega) = \sqrt{\frac{16}{1}}$$

$$\omega \gg \frac{1}{3}$$

$$M(\omega) = \sqrt{\frac{144\omega^2}{18\omega^2 + 81\omega^4}}$$

$$L(\omega) = 20\log(4) = 12.0411$$

Wyznaczyć po dwa punkty dla poszczególnych zakresów, wyrysować proste, dokonać przybliżenia w okolicy ω s



Wyznaczyć wartości przesunięcia fazowego dla trzech wartości:

ω	0,		$+\infty$
$\varphi(\omega)$ [rad]	0	-45	-90

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = \text{arc tg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

$$P = \frac{4}{1 + 9\omega^2} \quad Q = -\frac{12\omega}{1 + 9\omega^2}$$

$$\text{arctg}\left(\frac{-12\omega}{4}\right) = \text{arctg}(-3\omega)$$

