

# Analiza i synteza wybranego algorytmu sterowania predykcyjnego

## Cel ćwiczenia

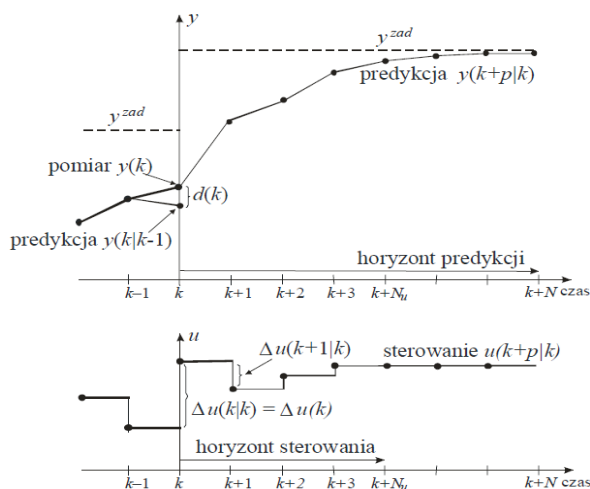
Celem ćwiczenia jest zapoznanie się ideą regulacji predykcyjnej oraz realizacja układu uogólnionego sterowania predykcyjnego GPC. Dla zaproponowanego układu zostanie zbadany wpływ ograniczeń sygnału sterującego oraz możliwość doboru różnych wag wchodzących w skład funkcji celu. Sterowania z rodziny predykcyjnych stosuje się wszędzie tam, gdzie występowanie opóźnień nie pozwoli na aplikację innych regulatorów, dlatego właśnie rozpatrywany będzie przypadek obiektu ze znacznym opóźnieniem.

## Idea regulacji predykcyjnej

Ogólną zasadę działania regulatorów predykcyjnych można określić jako zadanie wykonywane w każdej iteracji algorytmu, w każdej chwili  $k$ , wyznaczające wartości sterowań od chwili  $k$  aż do chwili  $k+N_u-1$  ( $N_u$  jest tutaj horyzontem sterowania). Wyznaczane są one na podstawie:

- dynamicznego modelu obiektu zakładającego określony model zakłóceń,
- pomiarów zmiennych wyjściowych obiektu w chwilach bieżącej i przeszłych,
- poprzednich wartości sterowań,
- znanej lub założonej trajektorii wartości zadanych wyjść obiektu.

Sterowania wyznaczone są w taki sposób, aby zminimalizować różnicę pomiędzy predykowanym wyjściem obiektu  $y(k+N_u-1|k)$  a wartościami zadanymi dla tego wyjścia  $r(k+i|k)$  na horyzoncie predykcyjnym  $N$  ( $i=1,2,\dots,N$ ). Jedynie pierwsza wartość z wyznaczonego ciągu optymalnych sterowań podawana jest na wejście obiektu  $u(k) = u(k|k)$ , gdyż w chwili  $(k+1)$  cała procedura pomiarów oraz predykcyjnej jest powtarzana. Stosowana jest więc zasada przesuwającego horyzontu, nazywaną często zasadą sterowania repetycyjnego. Przykład działania algorytmu predykcyjnego dla obiektu o jednym wejściu i jednym wyjściu został zobrazowany na rys. 1.



Rys. 1: Zasada regulacji predykcyjnej [4]

Na Rys. 1 zilustrowano wielkości będące podstawą działania algorytmu predykcyjnego. Na osi poziomej zaznaczono dyskretne chwile czasowe, przy czym  $k$  jest chwilą aktualną, w której podejmowane są decyzje o sterowaniu  $u(k) = u(k|k)$ . Przewidywana trajektoria wyjścia  $y(k+p|k)$  zależna jest zarówno od poprzednich jak i przyszłych wartości sterowań wyznaczanych w chwili  $k$ . Zakłada się przy tym, iż horyzont sterowania może być krótszy od horyzonty predykcji ( $N_u \leq N$ ).

Fakt występowania zakłóceń uwzględniono za pomocą  $d(k)$ , który to ukazuje różnicę pomiędzy wartością  $u(k)$ , a wartością przewidzianą w chwili  $(k-1)$ , tj.  $d(k) = y(k) - y(k|k-1)$ . Aktualizacja decyzji wobec innej wartości  $y(k)$  oznacza obecność dyskretnego sprzężenia zwrotnego zastosowanego w układzie sterowania.

Minimalizacja funkcji kryterialnej określającej jakość regulacji prowadzi, w oparciu o model obiektu sterowania, do wyznaczenia wartości sterowań w chwili bieżącej i następnych. Zasadniczym składnikiem takiej funkcji kryterialnej, stworzonej dla regulacji predykcyjnej, jest koszt odchylenia prognozowanej trajektorii wyjść od trajektorii zadanej. Typowym zachowaniem jest też uwzględnienie kar za zmienność wyznaczanych wartości sterowań.

Mając na uwadze powyższe dwa składniki można zdefiniować funkcję kryterialną jako:

$$J = E \left[ \sum_{i=1}^{N_y} (r(t+i) - y(t+i))^2 + q_u \sum_{i=1}^{N_u} (\Delta u(t+i-1))^2 \right] \quad (1)$$

Algorytm predykcyjny uwzględnia także ograniczenia amplitudy oraz przyrostu sygnałów sterujących. Ważnym zagadnieniem podczas doboru ograniczeń jest zapewnienie niepustości zbioru rozwiązań dopuszczalnych, tj. zapewnienie możliwości jednoczesnego spełnienia ograniczeń i równań wyjść. Sytuacja ta jednak nie powinna mieć miejsca przy praktycznych implementacjach algorytmu poza kilkoma odosobnionymi przypadkami [4].

### Algorytm GPC – uogólnione sterowanie predykcyjne

Algorytm GPC okazał się być jednym z najpopularniejszych algorytmów predykcyjnych. Wykorzystuje on model obiektu w postaci dyskretnego równania różnicowego opisującego relacje wejście – wyjście. Funkcja kryterialna odnosi się nie do trajektorii wartości zadanych, ale do trajektorii referencyjnej określanej zależnością:

$$r(k+p|k) = \gamma \cdot r(k+p-1|k) + (1-\gamma)r(k+p|k), \quad p=1, \dots, N, \quad (2)$$

gdzie  $0 \leq \gamma < 1$  jest współczynnikiem określającym z jaką prędkością trajektoria referencyjna, startując z aktualnie zmierzone wartości, będzie zbliżać się do trajektorii wartości zadanych. Wraz ze wzrostem wartości  $\gamma$  zbliżanie się trajektorii referencyjnej do zadanej staje się powolniejsze, przez co wymagania stawiane sygnałowi sterującemu są łagodniejsze.

W algorytmie GPC wykorzystuje się model obiektu w postaci dyskretnego równania różnicowego. W rozważanym przypadku obiektu jednowymiarowego ma on postać:

$$\Delta A(q^{-1})y(t) = \Delta B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})\xi(t), \quad (3)$$

gdzie:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{n_A} q^{-n_A}, \quad (4)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{n_B} q^{-n_B}, \quad (5)$$

$$C(q^{-1}) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_{n_C} q^{-n_C} \quad (6)$$

Warto wspomnieć, że  $\Delta=1-q^{-1}$ . Posiadając tak opisaną dynamikę obiektu, można wyznaczyć równanie wyjścia

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t-d) + \frac{C(q^{-1})}{\Delta A(q^{-1})}\xi(t), \quad (7)$$

wraz z jego alternatywną formą

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t-d) + \eta(t) \quad (8)$$

Teraz, poprzez wprowadzenie odpowiedniego równania diofantycznego

$$\Delta A(q^{-1})E_i(q^{-1}) + q^{-i}F_i(q^{-1}) = C(q^{-1}) \quad (10)$$

z wielomianami

$$E_i(q^{-1}) = 1 + e_1q^{-1} + \dots + e_{i-1}q^{-i+1} \quad (11)$$

$$F_i(q^{-1}) = f_0 + f_1q^{-1} + \dots + f_{n_A}q^{-n_A} \quad (12)$$

otrzymujemy możliwość obliczenia predykcji zakłóceń w następującej formie

$$\eta(t+i) = \frac{C(q^{-1})}{\Delta A(q^{-1})}\xi(t+d) = \frac{F_i(q^{-1})}{\Delta A(q^{-1})}\xi(t) + E_i(q^{-1})\xi(t+i) \quad (13)$$

co pozwala, w oparciu o równanie (7), przewidywać zachowanie wyjścia zgodnie z następującym wzorem

$$y(t+i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t+1-i) + \eta(t+i) \quad (14)$$

Po podstawieniu równania (13) do równania (14) otrzymujemy następującą zależność

$$y(t+i) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t+1-i) + \frac{F_i(q^{-1})}{\Delta A(q^{-1})}\xi(t) + E_i(q^{-1})\xi(t+i) \quad (15)$$

co po wykorzystaniu równania modelu oraz równania (10) można zapisać jako

$$y(t+i) = \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t) + \frac{E_i(q^{-1})B(q^{-1})}{C(q^{-1})}\Delta u(t+i-1) + E_i(q^{-1})\xi(t+i) \quad (16)$$

Biorąc pod uwagę, że w skład rzeczywistej wartości wyjścia w chwili przyszłej wchodzi dwa człony: wynikający z dynamiki oraz wynikający z zakłóceń, można zapisać aproksymację wyjścia w następującej postaci

$$\hat{y}(t+i) = \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t) + \frac{E_i(q^{-1})B(q^{-1})}{C(q^{-1})}\Delta u(t+i-1) \quad (17)$$

Na tym etapie wprowadzane jest drugie równanie diofantyczne, służące do uzyskania tzw. macierzy dynamiki układu. Macierze ta pozwala na przewidywanie odpowiedzi układu dla zadanych przyrostów sterowania.

Wspomniane równanie diofantyczne definiowane jest w następujący sposób

$$C(q^{-1})G_i(q^{-1}) + q^{-i}\Gamma_i(q^{-1}) = E_i(q^{-1})B(q^{-1}) \quad (18)$$

gdzie:

$$\Gamma_i(q^{-1}) = \gamma_0 + \gamma_1q^{-1} + \dots + \gamma_{\max(n_B-1, n_C-1)}q^{-(\max(n_B-1, n_C-1))} \quad (19)$$

$$G_i(q^{-1}) = g_0 + g_1q^{-1} + \dots + g_{i-1}q^{-i+1} \quad (20)$$

Istotne jest tutaj zauważenie, że to równanie jest zadeklarowane dla różnych czasów opóźnienia  $i$ , przez co należało będzie rozwiązać je dla wszystkich czasów opóźnienia aż po horyzont predykcji. Wykorzystując równanie (18) można teraz dokonać estymacji wyjścia zgodnie z poniższymi wzorami

$$\hat{y}(t+i) = \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t) + G_i(q^{-1})\Delta u(t+i-1) + \frac{r_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}\Delta u(t-1) \quad (21)$$

$$\hat{y}(t+i) = G_i(q^{-1})\Delta u(t+i-1) + \frac{r_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}\Delta u(t-1) + \frac{F_i(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(t) \quad (22)$$

Równanie (22) można podzielić na dwie części. Pierwsza z nich demonstrowuje wpływ przyszłych sterowań na odpowiedź układu, druga z nich pokazuje wpływ próbek, które miały już miejsce. Powyższy fakt można opisać wykorzystując zależność

$$\hat{y}(t+i) = G_i(q^{-1})\Delta u(t+i-1) + f(t+i) \quad (23)$$

gdzie  $f(t+i) = y(t+i|t)$  jest wektorem wchodzącym w skład swobodnej odpowiedzi predyktora, to jest przewidywanej odpowiedzi obiektu przy stałej wartości sterowania, a powyższa notacja oznacza, iż jest to wartość sygnału wyjściowego w chwili  $t+i$  wyliczona na podstawie danych dostępnych w chwili  $t$ .

$$\hat{y}(t+i) = G_i(q^{-1})\Delta u(t+i-1) + \hat{y}(t+i|t) \quad (24)$$

Wykorzystując równanie diofantyczne (18) można dokonać podstawienia skutkującego następującą zależnością

$$\hat{y}(t+i|t) = (1 - C(q^{-1}))\hat{y}(t+i|t) + F_i(q^{-1})y(t) + r_i(q^{-1})\Delta u(t-1) \quad (25)$$

która z kolei prowadzi do ponownego rozdzielenia odpowiedzi swobodnej, tym razem jednak zapisanej już w postaci wektorowej, a więc obejmującej wszystkie próbki będące w horyzoncie predykcji. Równanie to można zapisać w następującej formie

$$\hat{y}(t+i) = G_i(q^{-1})\Delta u(t+i-1) + (1 - C(q^{-1}))\hat{y}(t+i|t) + F_i(q^{-1})y(t) + r_i(q^{-1})\Delta u(t-1) \quad (26)$$

wraz z jego odpowiednikiem, analogicznym do równania (23):

$$\hat{y}(t+i) = \mathbf{G}\Delta \underline{u}(t) + \underline{f}(t+1) \quad (27)$$

Co więcej, macierz  $\mathbf{G}$  składa się z próbek odpowiedzi impulsowej toru sterowania, a więc ze współczynników wielomianu  $G_i(q^{-1})$ . Teraz, definiując wektor kolejnych próbek wartości referencyjnych

$$\underline{r}(t+i) = [r(t+1), r(t+2), \dots, r(t+N_y)] \quad (28)$$

można sformułować minimalizowany wskaźnik jakości, przedstawiający się w teraz w następującej formie

$$J = \left( \underline{r}(t+1) - \hat{y}(t+1) \right)^T \left( \underline{r}(t+1) - \hat{y}(t+1) \right) + q_u \underline{u}^T(t) \underline{u}(t) \quad (29)$$

który prowadzi do uzyskania prawa sterowania w następującej postaci

$$\Delta \underline{u}(t) = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + q_u \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \left( \underline{r}(t+1) - \underline{f}(t+1) \right) \quad (30)$$

podstawiając

$$\mathbf{K} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + q_u \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T \quad (31)$$

oraz wiedząc że na wejście układu ma zostać podany tylko pierwszy z optymalnych wektorów sterowania, otrzymujemy

$$\Delta u(t) = \bar{\mathbf{K}}_1 \left( \underline{r}(t+1) - \underline{f}(t+1) \right) \quad (32)$$

gdzie ostatnim brakującym do wyznaczenia elementem jest odpowiedź swobodna układu. Otrzymuje się ją poprzez przekształcenie równania (27) do następującej postaci

$$\underline{\hat{y}}(t+i) - \mathbf{G}\underline{\Delta u}(t) = \underline{f}(t+1) \quad (33)$$

Ostatecznym wynikiem obliczeń w uogólnionym algorytmie sterowania predykcyjnego jest wyliczenie optymalnego przyrostu sterowania, które zostanie podane na wejście obiektu

$$\underline{\Delta u}(t) = \bar{\mathbf{K}}_1 \left( \underline{r}(t+1) - \underline{\hat{y}}(t+i) - \mathbf{G}\underline{\Delta u}(t) \right) \quad (34)$$

Tak wyznaczony układ regulacji charakteryzuje się odpornością na opóźnienia, minimalnofazowość, niestabilność układu w torze otwartym, ograniczenia wartości sterowań oraz ograniczenia przyrostu tych wartości. Przykładowe wyznaczenie uogólnionego regulatora predykcyjnego przedstawione jest w następnym rozdziale instrukcji.

### Przykład numeryczny

Zostanie tutaj omówiona tablicowa procedura, pozwalająca na wyprowadzenie algorytmu uogólnionego sterowania predykcyjnego dla przykładowego obiektu liniowego. Niech taki obiekt będzie opisany wielomianami:

$$A(q^{-1}) = 1 - 1.8q^{-1} + 0.9q^{-2}$$

$$B(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$$

$$C(q^{-1}) = 1$$

oraz przy założeniu parametrów  $N_u = N_y = 3, q_u = 0.1$ . Zgodnie ze wzorami przedstawionymi w poprzednim rozdziale instrukcji, pierwszym krokiem będzie wyznaczenie predyktora wyjścia  $\underline{\hat{y}}(t+i)$  dla wszystkich chwil czasowych pomiędzy  $i = 1$  aż do chwili  $i = N_y$ . Dzięki temu uzyskamy wektor  $\underline{\hat{y}}(t+i)$ , będący kluczowym faktorem rozwiązania sterowania predykcyjnego.

#### 1. Wyznaczenie $\underline{\hat{y}}(t+i), i = 1$

W celu wyznaczenia predyktora wyjścia w chwili  $(t+1)$  wykorzystane zostanie równanie diofantyczne (10) rozpisywane w następujący sposób

$$(1 - q^{-1})(1 - 1.8q^{-1} + 0.9q^{-2}) + q^{-1}(f_0 + f_1q^{-1} + f_2q^{-2}) = 1$$

co po przeliczeniu daje następujące równanie

$$f_0q^{-1} + f_1q^{-2} + f_2q^{-3} = 2.8q^{-1} - 2.7q^{-2} + 0.9q^{-3}$$

z czego można wywnioskować, że

$$E(q^{-1}) = 1, F_1(q^{-1}) = 2.8 - 2.7q^{-1} + 0.9q^{-2}$$

Po rozpisaniu równania diofantycznego (18) w podobny sposób otrzymujemy następujące rozwiązanie

$$g_0 + \gamma(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$$

otrzymują wielomiany równania diofantycznego równe odpowiednio

$$G(q^{-1}) = g_0 = 1, \Gamma_1(q^{-1}) = \gamma_0 = 0.5$$

Ostatecznie, wykorzystując równania (26) można zapisać

$$\hat{y}(t+i) = G_i(q^{-1})\Delta u(t+i-1) + (1 - C(q^{-1}))\hat{y}(t+i|t) + F_i(q^{-1})y(t) + r_i(q^{-1})\Delta u(t-1)$$

$$\hat{y}(t+1) = G_1(q^{-1})\Delta u(t) + F_1(q^{-1})y(t) + r_1(q^{-1})\Delta u(t-1)$$

$$\hat{y}(t+1) = \Delta u(t) + (2.8 - 2.7q^{-1} + 0.9q^{-2})y(t) + 0.5\Delta u(t-1)$$

$$\hat{y}(t+1) = \Delta u(t) + 2.8y(t) - 2.7y(t-1) + 0.9y(t-2) + 0.5\Delta u(t-1)$$

$$\hat{y}(t+1) = \Delta u(t) + 0.5\Delta u(t-1) + 2.8y(t) - 2.7y(t-1) + 0.9y(t-2)$$

Ponownie można tu zaobserwować, że predykcja wyjścia dokonywana jest w oparciu o przeszłe oraz aktualne wartości wyjścia oraz przyrostu sterowania.

## 2. Wyznaczenie $\hat{y}(t+i)$ , $i = 2$

W celu wyznaczenia predyktora wyjścia w chwili  $(t+2)$  wykorzystane zostanie równanie diofantyczne (10) rozpisywane w następujący sposób

$$(1 - q^{-1})(1 - 1.8q^{-1} + 0.9q^{-2})(1 + e_1q^{-1}) + q^{-2}(f_0 + f_1q^{-1} + f_2q^{-2}) = 1$$

$$e_1q^{-1} + (f_0 - 2.8e_1)q^{-2} + (2.7e_1 + f_1)q^{-3} + (f_2 - 0.9e_1)q^{-4} = 2.8q^{-1} - 2.7q^{-2} + 0.9q^{-3}$$

stąd obliczyć można, że

$$E_2(q^{-1}) = 1 + 2.8q^{-1}, F_2q^{-1} = 5.14 - 6.66q^{-1} + 2.52q^{-2}$$

Analogicznie do poprzednich obliczeń, skorzystamy teraz z równania diofantycznego (18) otrzymujemy

$$g_0 + g_1q^{-1} + \gamma_2q^{-2} = (1 + e_1q^{-1})(1 + 0.5q^{-1})$$

czyli

$$g_0 + (g_1 - e_1)q^{-1} + (\gamma_0 - 0.5e_1)q^{-2} = 1 + 0.5q^{-1}$$

więc

$$G_2 = 1 + 3.3q^{-1}, r_2 = \gamma_0 = 1.4$$

ostatecznie prowadząc do predyktora wyjścia

$$\hat{y}(t+i) = G_i(q^{-1})\Delta u(t+i-1) + (1 - C(q^{-1}))\hat{y}(t+i|t) + F_i(q^{-1})y(t) + r_i(q^{-1})\Delta u(t-1)$$

$$\hat{y}(t+2) = G_2(q^{-1})\Delta u(t+1) + F_2(q^{-1})y(t) + r_2(q^{-1})\Delta u(t-1)$$

$$\hat{y}(t+2) = \Delta u(t+1) + 3.3\Delta u(t) + 5.14y(t) - 6.66y(t-1) + 2.55y(t-2) + 1.4\Delta u(t-1)$$

$$\hat{y}(t+2) = \Delta u(t+1) + 3.3\Delta u(t) + 1.4\Delta u(t-1) + 5.14y(t) - 6.66y(t-1) + 2.55y(t-2)$$

### 3. Wyznaczenie $\hat{y}(t+i), i=3$

$$(1 - q^{-1})(1 - 1.8q^{-1} + 0.9q^{-2})(1 + e_1q^{-1} + e_2q^{-2}) + q^{-3}(f_0 + f_1q^{-1} + f_2q^{-2}) = 1$$

$$e_1q^{-1} + (e_2 - 2.8e_1)q^{-2} + (f_0 + 2.7e_1 - 2.8e_2)q^{-3} + (f_1 - 0.9e_1 + 2.7e_2)q^{-4} + (f_2 - 0.9e_2)q^{-5}$$

$$= 2.8q^{-1} - 2.7q^{-2} + 0.9q^{-3}$$

rozwiązując układ równań wynikający z powyższego wzoru otrzymujemy

$$E_3(q^{-1}) = 1 + 2.8q^{-1} + 5.14q^{-2}, F_3(q^{-1}) = 7.732 - 11.358q^{-1} + 4.626q^{-2}$$

Ponownie, jak w poprzednich przypadkach, wykorzystujemy teraz równanie diofantyczne (18) w celu uzyskania

$$g_0 + g_1q^{-1} + g_2q^{-2} + \gamma_0q^{-3} = (1 + e_1q^{-1} + e_2q^{-2})(1 + 0.5q^{-1})$$

czyli

$$g_0 + (g_1 - e_1)q^{-1} + (g_2 - 0.5e_1 - e_2)q^{-2} + (\gamma_0 - 0.5e_2)q^{-3} = 1 + 0.5q^{-1}$$

Ponownie, po rozwiązaniu powyższego równania otrzymujemy odpowiednie wielomiany

$$G_3(q^{-1}) = 1 + 3.3q^{-1} + 6.54q^{-2}, \Gamma_3(q^{-1}) = \gamma_0 = 2.57$$

Pozwalając ostatecznie na wyliczenie predykcji wyjścia

$$\hat{y}(t+i) = G_i(q^{-1})\Delta u(t+i-1) + (1 - C(q^{-1}))\hat{y}(t+i|t) + F_i(q^{-1})y(t) + \Gamma_i(q^{-1})\Delta u(t-1)$$

$$\hat{y}(t+3) = G_3(q^{-1})\Delta u(t+2) + F_3(q^{-1})y(t) + \Gamma_3(q^{-1})\Delta u(t-1)$$

$$\hat{y}(t+3) = \Delta u(t+2) + 3.3\Delta u(t+1) + 6.54\Delta u(t) + 7.732y(t) - 11.358y(t-1) + 4.626y(t-2)$$

$$+ 2.57\Delta u(t-1)$$

$$\hat{y}(t+3) = \Delta u(t+2) + 3.3\Delta u(t+1) + 6.54\Delta u(t) + 2.57\Delta u(t-1) + 7.732y(t) - 11.358y(t-1)$$

$$+ 4.626y(t-2)$$

4. Następnym etapem jest wyznaczenie przyrostów sterowań w oparciu o prawo uogólnionej regulacji predykcyjnej. Wykorzystując wyznaczone w poprzednich punktach predyktory należy zapisać całość w postaci wektorowej, tak jak zostało to przedstawione w równaniu (27). W tym celu należy zapisać poniższe równania

$$\hat{y}(t+1) = \Delta u(t) + 2.8y(t) - 2.7y(t-1) + 0.9y(t-2) + 0.5\Delta u(t-1)$$

$$\hat{y}(t+2) = \Delta u(t+1) + 3.3\Delta u(t) + 5.14y(t) - 6.66y(t-1) + 2.55y(t-2) + 1.4\Delta u(t-1)$$

$$\hat{y}(t+3) = \Delta u(t+2) + 3.3\Delta u(t+1) + 6.54\Delta u(t) + 7.732y(t) - 11.358y(t-1) + 4.626y(t-2)$$

$$+ 2.57\Delta u(t-1)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(t+1) \\ \hat{y}(t+2) \\ \hat{y}(t+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3.3 & 1 & 0 \\ 6.54 & 3.3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2.8y(t) - 2.7y(t-1) + 0.9y(t-2) + 0.5\Delta u(t-1) \\ 5.14y(t) - 6.66y(t-1) + 2.55y(t-2) + 1.4\Delta u(t-1) \\ 7.732y(t) - 11.358y(t-1) + 4.626y(t-2) + 2.57\Delta u(t-1) \end{bmatrix}$$

Z powyższego równania możemy wyznaczyć macierz  $\mathbf{G}$  która będzie kluczowa w wyznaczaniu sterowań

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3.3 & 1 & 0 \\ 6.54 & 3.3 & 1 \end{bmatrix}$$

Teraz, korzystając już bezpośrednio z równania  $\Delta \underline{u}(t) = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + q_u \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T (\underline{r}(t+1) - \underline{f}(t+1))$  otrzymujemy

$$\Delta \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} 0.3802 & 0.2974 & -0.0611 \\ -0.9572 & -0.2074 & 0.2974 \\ 0.6112 & -0.9572 & 0.3802 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(t+1) - (2.8y(t) - 2.7y(t-1) + 0.9y(t-2) + 0.5\Delta u(t-1)) \\ r(t+2) - (5.14y(t) - 6.66y(t-1) + 2.55y(t-2) + 1.4\Delta u(t-1)) \\ r(t+3) - (7.732y(t) - 11.358y(t-1) + 4.626y(t-2) + 2.57\Delta u(t-1)) \end{bmatrix}$$

Po wymnożeniu tych macierzy otrzymujemy ostatecznie wektor odpowiednich sterowań

$$\Delta \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} 0.3802r(t+1) + 0.2974r(t+2) - 0.0611r(t+3) - 2.1208y(t) + 2.3133y(t-1) - 0.8090y(t-2) - 0.4494\Delta u(t-1) \\ -0.9572r(t+1) - 0.2704r(t+2) + 0.2974r(t+3) + 1.7705y(t) - 1.0074y(t-1) + 0.1671y(t-2) + 0.0928\Delta u(t-1) \\ 0.6112r(t+1) - 0.9572r(t+2) + 0.3802r(t+3) + 0.2689y(t) - 0.4064y(t-1) + 0.1033y(t-2) + 0.0574\Delta u(t-1) \end{bmatrix}$$

z którego na obiekt podawane jest tylko pierwsze z obliczonych optymalnych (w myśl założonego wskaźnika jakości) wartości sterowań.

Następnym etapem ćwiczenia jest zaimplementowanie przeprowadzonych obliczeń do środowiska Matlab/Simulink. Pozwoli to na opracowanie procedury umożliwiającej opracowanie sterowania predykcyjnego dla całej klasy obiektów oraz na zbadanie wpływu różnych parametrów na zachowanie układu działającego w zamkniętej pętli regulacji.



## Ćwiczenie laboratoryjne

### Czynności wstępne

1. Uruchomić środowisko Matlab/Simulink. Stworzyć nowy skrypt w formie m-pliku, wyczyścić przestrzeń roboczą oraz zamknąć niepotrzebne okna (clear all, close all).
2. Zadeklarować zmienną  $T_s=0.5$ , odpowiedzialną za czas próbkowania symulowanego układu.
3. Zadeklarować zmienną symboliczną  $q$ , która po podniesieniu do potęgi  $-1$  będzie równoznaczna operatorowi  $z^{-1}$ .
4. Utworzyć wielomiany występujące w opisie obiektu, wykorzystać w tym celu stworzony operator  $q$ .

### Wyznaczenie $\hat{y}(t + i), i = 1$

5. Zadeklarować zmienne symboliczne  $e1, f0, f1, f2$
6. Utworzyć wielomiany  $e$  oraz  $f$  zgodnie z równaniami (11) i (12). Wykorzystać utworzone przed chwilą parametry symboliczne.
7. Zadeklarować zmienną  $eq1$ , odzwierciedlającą równanie (10) przekształcone do takiej postaci, aby po lewej stronie pozostało 0.
8. Przekształcić równanie  $eq1$  do takiej postaci, aby dało się wyodrębnić współczynniki stojące przy kolejnych potęgach operatora  $q$ . W tym celu należy wykorzystać polecenia `collect` oraz `expand`. Następnie wymnożyć równanie przez operator  $q^3$  (wymaga tego jedna z operacji). Następnie użyć poleceń `simplify`, `collect` oraz `coeffs`.
9. Obliczyć rozwiązanie równania diofantycznego (10) wykorzystując polecenie `solve`. Wynik przypisać z powrotem do zmiennej  $eq1$ .
10. Wykorzystując składnię  $eq1.f0$  wyodrębnić poszczególne składowe otrzymanego rozwiązania oraz przekonwertować je do liczby zmiennoprzecinkowej (użyć polecenia `double`). Współczynniki wielomianu  $F$  zapisać w postaci macierzy  $F(1,:)=[f0 \ f1 \ f2]$ . Wielomian  $e$  zapisać w formie umożliwiającej użycie go w następnych punktach.
11. Zadeklarować zmienne symboliczne konieczne do stworzenia wielomianów  $g$  oraz  $r$ .
12. Zadeklarować zmienną  $eq2$ , odzwierciedlającą równanie (18) przekształcone do takiej postaci, aby po prawej stronie znajdowało się tylko 0.
13. Obliczyć rozwiązanie równania diofantycznego podobnie do procedury przedstawionej w punkcie 8, z tym zastrzeżeniem, że tutaj wymagane będzie wymnożenie przez operator  $q^1$ .
14. Współczynniki wielomianu  $R$  oraz  $G$  zapisać w postaci macierzowej, tj. wykorzystując składnię podobną do tej z punktu 10 -  $G(1,:)=[g0 \ 0 \ 0]$

Po wykonaniu tego punktu zostaną uzyskane pierwsze wiersze macierzy  $F$   $G$  oraz  $R$ . Będą one potrzebne przy syntezie całości układu sterowania.

### Wyznaczenie $\hat{y}(t + i), i = 2$

15. Wyczyścić wartości zmiennych symbolicznych deklarowanych w punkcie 5.
16. Zadeklarować zmienne symboliczne potrzebne do rozwiązania równania diofantycznego (10). W tym przypadku należy pamiętać o uwzględnieniu dodatkowych parametrów  $f_2$  oraz  $e_1$ .
17. Podobnie jak wcześniej, uzyskać rozwiązanie równania diofantycznego. Tym razem równanie należy wymnożyć przez operator  $q^4$ .
18. Parametry wielomianu  $f$  zapisać jako drugi wiersz macierzy  $F - F(2,:)$ , a wielomian  $e$  zapisać w formie jawnej (dokonać ponownej deklaracji wielomianu  $e$ , teraz już ze znanym współczynnikiem  $e_1$ ).
19. Rozwiązać drugie równanie diofantyczne. W tym celu zadeklarować brakujące zmienne symboliczne a następnie wymnożyć całe równanie przez operator  $q^2$ . Uzyskane współczynniki wielomianów  $g$  oraz  $r$  zapisać odpowiednio jako drugie wiersze macierzy  $G$  oraz  $R$  ( $G(2,:)= [g_1 \ g_0 \ 0]$ )

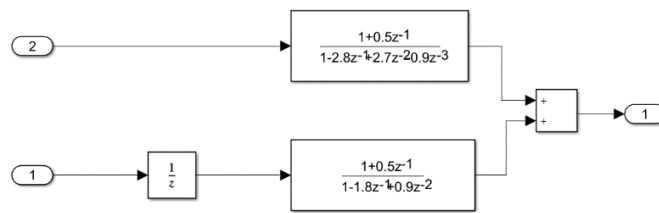
### Wyznaczenie $\hat{y}(t + i), i = 3$

16. Zresetować wartości zmiennych symbolicznych deklarowanych w poprzednich punktach, utworzyć brakujące zmienne  $e_2$   $g_2$ .
17. Przeprowadzić ponownie wszystkie wymagane obliczenia. Tym razem pierwsze równanie należy wymnożyć przez  $q^5$  a drugie przez  $q^3$ .
18. Uzyskane wyniki zapisać jako trzecie kolumny macierzy  $F$ ,  $G$  oraz  $R$ .
19. Zadeklarować zmienną  $q_u=0.1$ , tak jak ma to miejsce w przykładzie numerycznym.
20. Zgodnie ze wzorem (31) obliczyć macierz  $K$ . Sprawdzić, czy uzyskane wartości zgadzają się z tymi podanymi w przykładzie numerycznym.
21. Sprawdzić zawartość macierzy  $K$ . Jeżeli wszystko zostało poprawnie wykonane, macierz  $K$  powinna być taka jak pokazano w przykładzie numerycznym. Macierz  $F$  powinna być równa  $F = \begin{bmatrix} 2.8 & -2.7 & 0.9 \\ 5.14 & -6.66 & 2.52 \\ 7.732 & -11.358 & 4.626 \end{bmatrix}$ , a

$$\text{macierz } R = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.4 \\ 2.57 \end{bmatrix}.$$

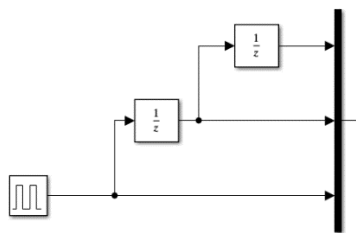
### Realizacja układu w środowisku Simulink

22. Zgodnie z równaniem (7) zrealizować model obiektu. Wielomiany opisujące obiekt powinny być takie same jak te wykorzystane w przykładzie numerycznym. Całość zapisać jako subsystem, pozwalając jednocześnie na wprowadzenie sygnału sterującego i zakłócającego oraz wyprowadzenie sygnału wyjściowego.



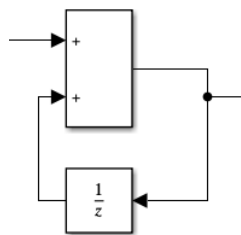
Rys. 2 Model obiektu wykorzystanego w ćwiczeniu

23. Zrealizować człon zadający wartość zadaną. Z przykładu numerycznego można wyczytać, że do realizacji sterowania predykcyjnego będą potrzebne wartości zadane dla trzech chwil czasowych, odpowiednio  $(t+1)$ ,  $(t+2)$ ,  $(t+3)$ , przy czym należy zachować przyczynowość między kolejnymi wartościami zadanymi.



Rys. 3. Moduł zadający wartość referencyjną

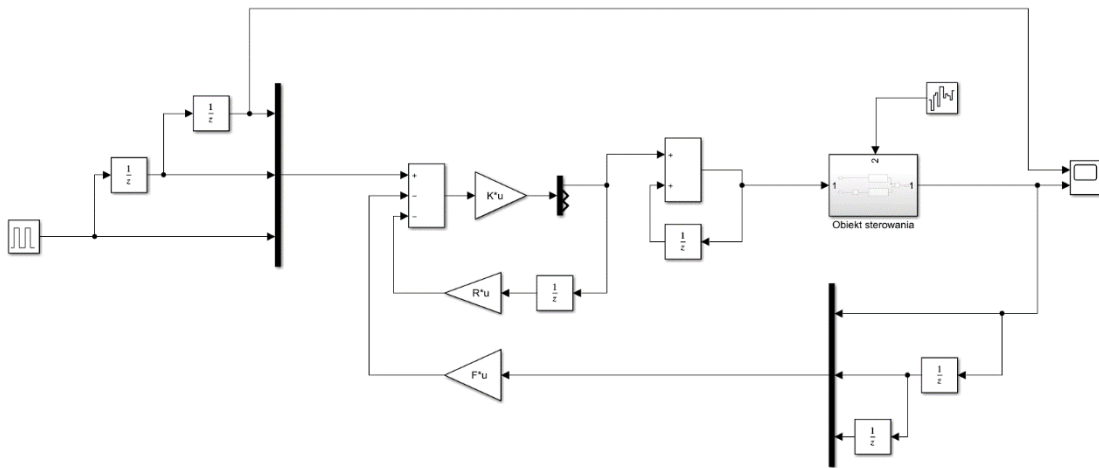
24. Wiedząc, że wynikiem działania omawianego prawa sterowania jest optymalny przyrost sterowania, zrealizować moduł na którego wejście podawany jest przyrost sterowania, a na wyjściu pojawia się wartość sterowania. Wyjście tego modułu podłączyć do wejścia obiektu.



Rys. 4. Moduł obliczający wartość sterowania w oparciu o jego przyrost

25. Zrealizować układ sterowania zgodnie ze wzorem (30). We wszystkich możliwych miejscach upewnić się, że został wpisany czas próbkowania  $T_s$ , zadeklarowany prędej w skrypcie.

26. Ze zbioru trzech optymalnych przyrostów sterowań wyodrębnić wektor odpowiadający aktualnym przyrostom, i to ten wektor przesłać na wejście układu obliczającego wartość sterowania w oparciu o jego przyrost.



Rys. 5. Przykładowa realizacja układu uogólnionego sterowania predykcyjnego

27. Jako wartość referencyjną podać przebieg impulsowy o współczynniku wypełnienia równym 50% i okresie równym 20s. Dodać blok wprowadzający zakłócenia do układu regulacji. Jako moc szumu wpisać 0.0001, a jako ziarno generatora liczb losowych wpisać numer indeksu.

28. Umożliwić obserwację zależności pomiędzy wartością zadaną a wartością uzyskaną na wyjściu obiektu.

29. Utworzyć moduł umożliwiający zliczenie sumy kwadratu uchybu regulacji. Przeprowadzić badanie dla różnych wartości współczynnika  $q_u > 0$ . Dla 3 znacząco różnych wartości zaobserwować przebiegi układu regulacji oraz wartość uzyskanego błędu. Uzyskane przebiegi zamieścić w sprawozdaniu wraz z wnioskami.