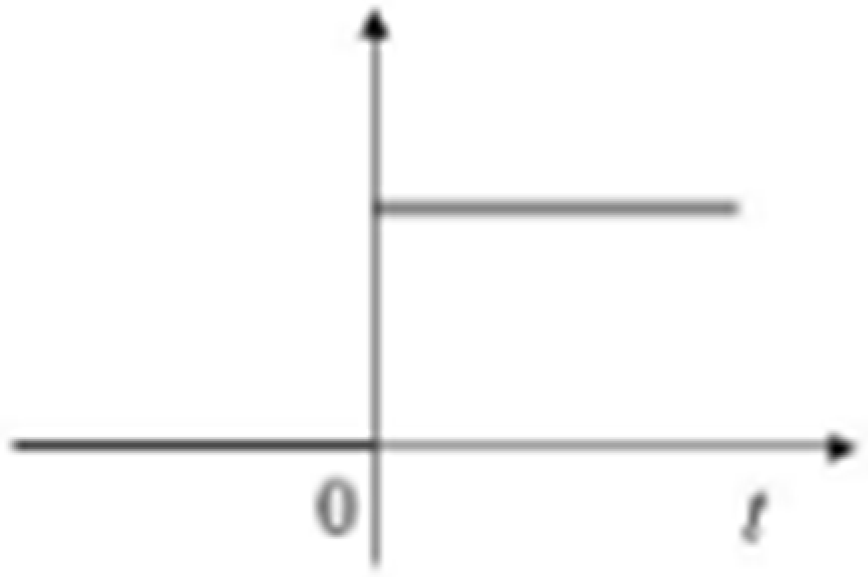
Charakterystyki czasowe

Wyznaczanie odpowiedzi czasowych

Odpowiedź układu można wyznaczyć posiadając znaną transmitancję operatorową układu oraz transformatę sygnału wejściowego. Zwyczajowo, spośród odpowiedzi czasowych wyznacza się dwie zasadnicze odpowiedzi

Odpowiedź impulsową:

Odpowiedź skokową:



Charakterystyka impulsowa (odpowiedź impulsowa)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow Y(s) = G(s)\,U(s)$$

W celu uzyskania charakterystyki impulsowej należy liniowy obiekt stacjonarny pobudzić sygnałem wejściowym w postaci

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow U(s)=1$$

Dzięki tej własności otrzymujemy transformatę sygnału wyjściowego równą transmitancji obiektu

$$Y(s) = G(s)$$

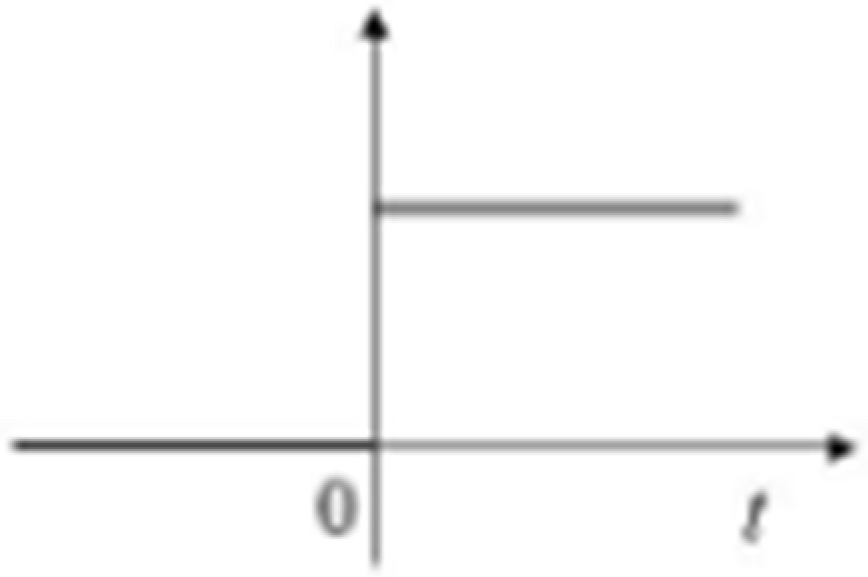
co pozwala w ostateczności na przewidzenie odpowiedzi układu na każde inne (dowolne) pobudzenie.

Wyznaczanie odpowiedzi czasowych

Odpowiedź układu można wyznaczyć posiadając znaną transmitancję operatorową układu oraz transformatę sygnału wejściowego. Zwyczajowo, spośród odpowiedzi czasowych wyznacza się dwie zasadnicze odpowiedzi

Odpowiedź impulsową:

Odpowiedź skokową:



Charakterystyka skokowa (odpowiedź skokowa)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Longrightarrow Y(s) = G(s)\,U(s)$$

W celu uzyskania charakterystyki skokowej należy liniowy obiekt stacjonarny pobudzić sygnałem wejściowym w postaci

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t >= 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$$

Otrzymujemy odpowiednio postać transmitancyjną oraz czasową sygnału wyjściowego

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{G(s)}{s} \Longrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \int_0^t g(\tau)d\tau = h(t)$$

Człon proporcjonalny

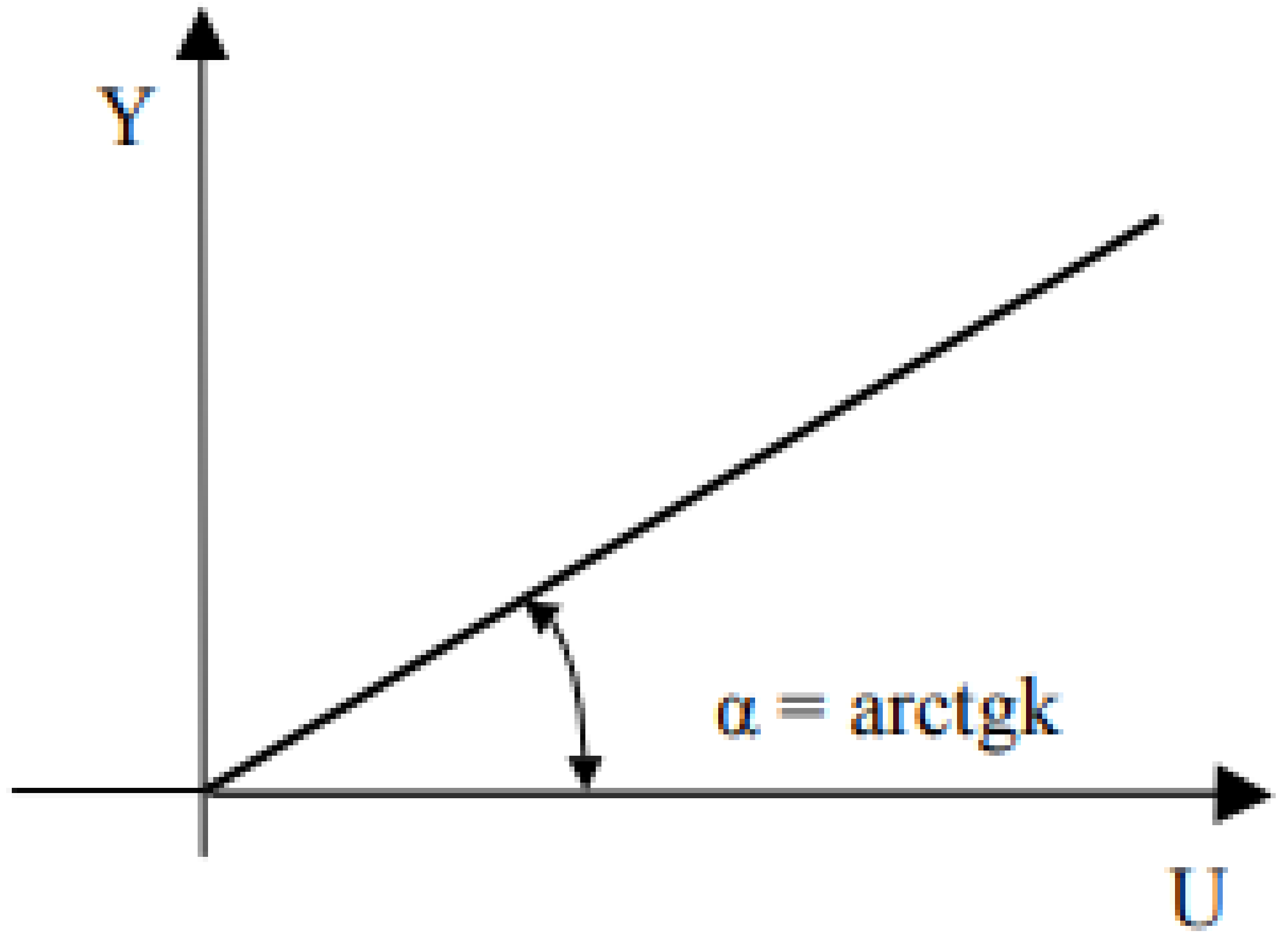
Człon proporcjonalny można opisać za pomocą równania w dziedzinie czasu

$$y(t) = ku(t)$$

Oraz w formie transmitancji operatorowej

$$Y(s) = k\,U(s)$$

$$Y = kU$$

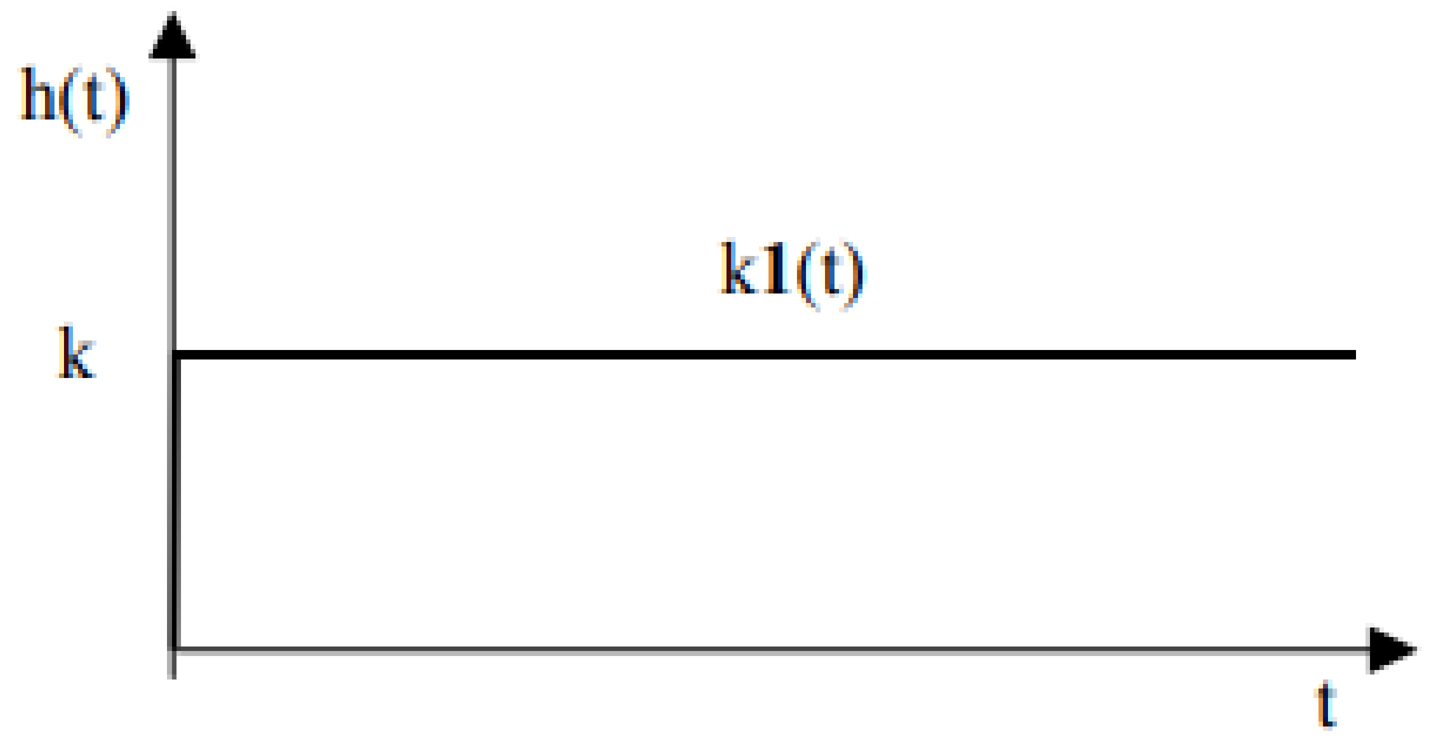


Człon proporcjonalny

Odpowiedź będzie więc sygnałem wejściowym wzmocnionym *k* razy

W przypadku pobudzenia skokiem jednostkowym otrzymujemy

$$h(t) = k$$



Człon inercyjny

Niech liniowy obiekt stacjonarny będzie opisany poniższym równaniem różniczkowym

$$T\frac{dy}{dt} + y = ku$$

Odpowiadającemu zapisowi w formie transformat

$$Y(s)(Ts+1) = kU(s)$$

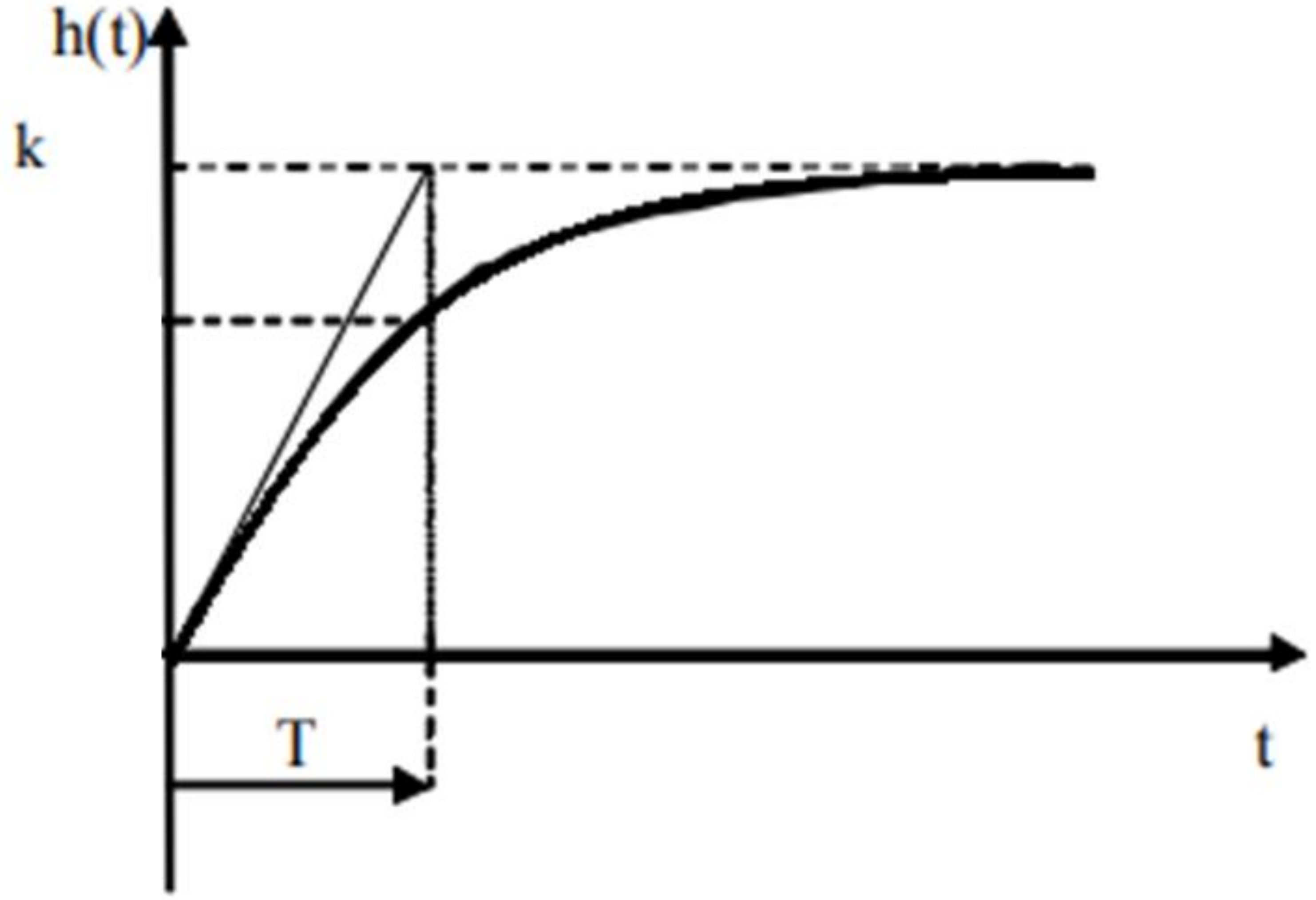
Oraz transmitancji operatorowej

$$Y(s) = \frac{k}{Ts+1}U(s)$$

Człon inercyjny

Po pobudzeniu obiektu skokiem jednostkowym otrzymujemy równanie wyjścia

$$Y(s) = \frac{k}{Ts(s + \frac{1}{T})}$$



Natomiast po dokonaniu odwrotnej transformacji Laplace'a otrzymujemy formę czasową

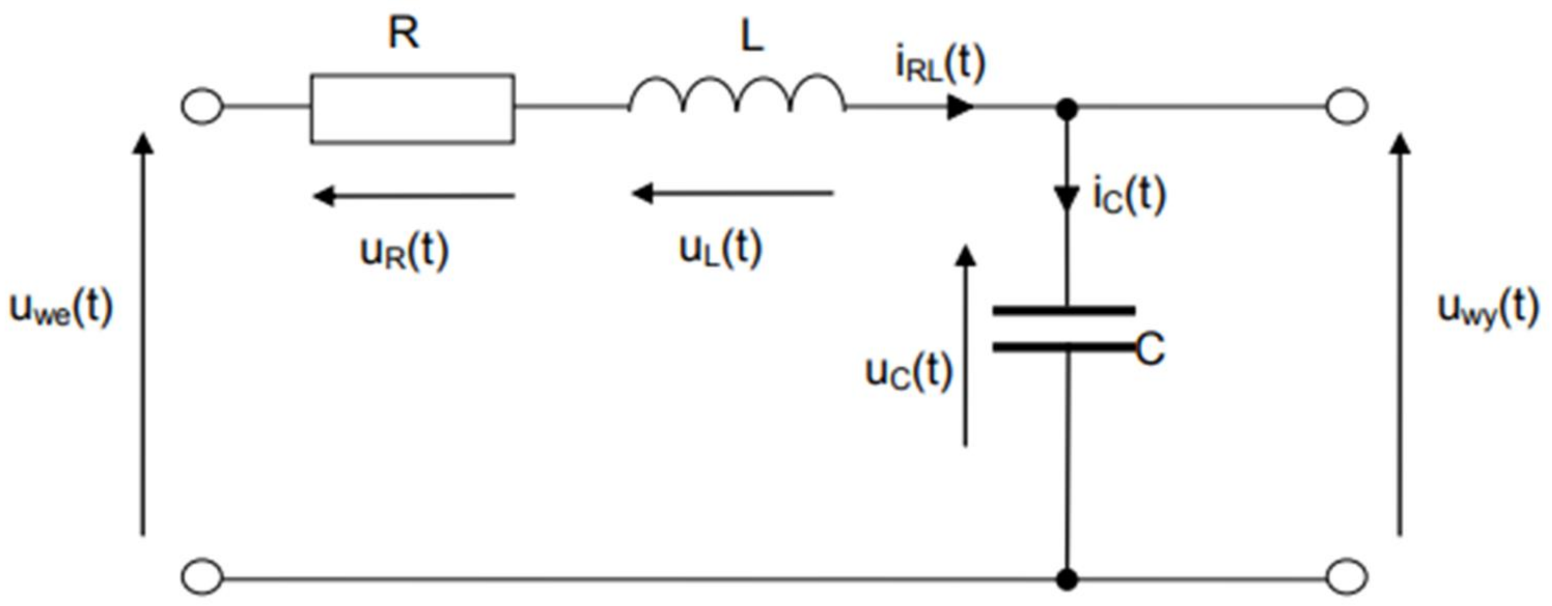
$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

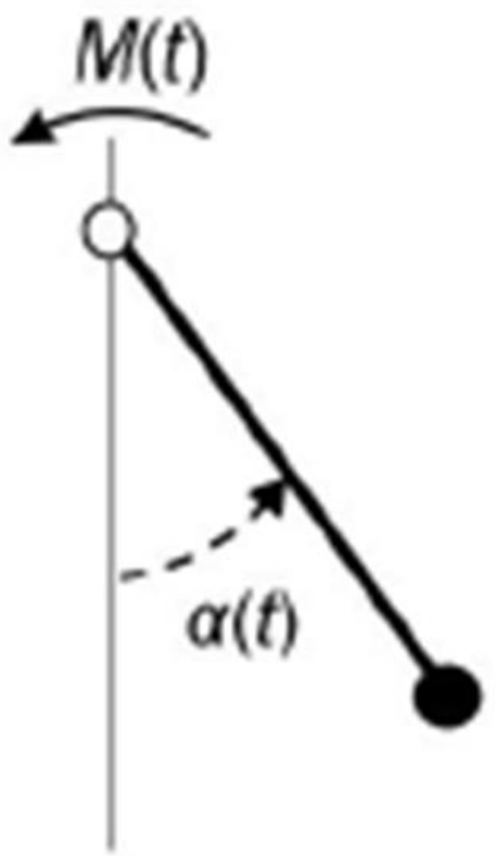
Człon oscylacyjny

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\xi\omega_n \frac{dy}{dt} + \omega_n^2 y = k\omega_n^2 u$$

$$Y(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} U(s)$$

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



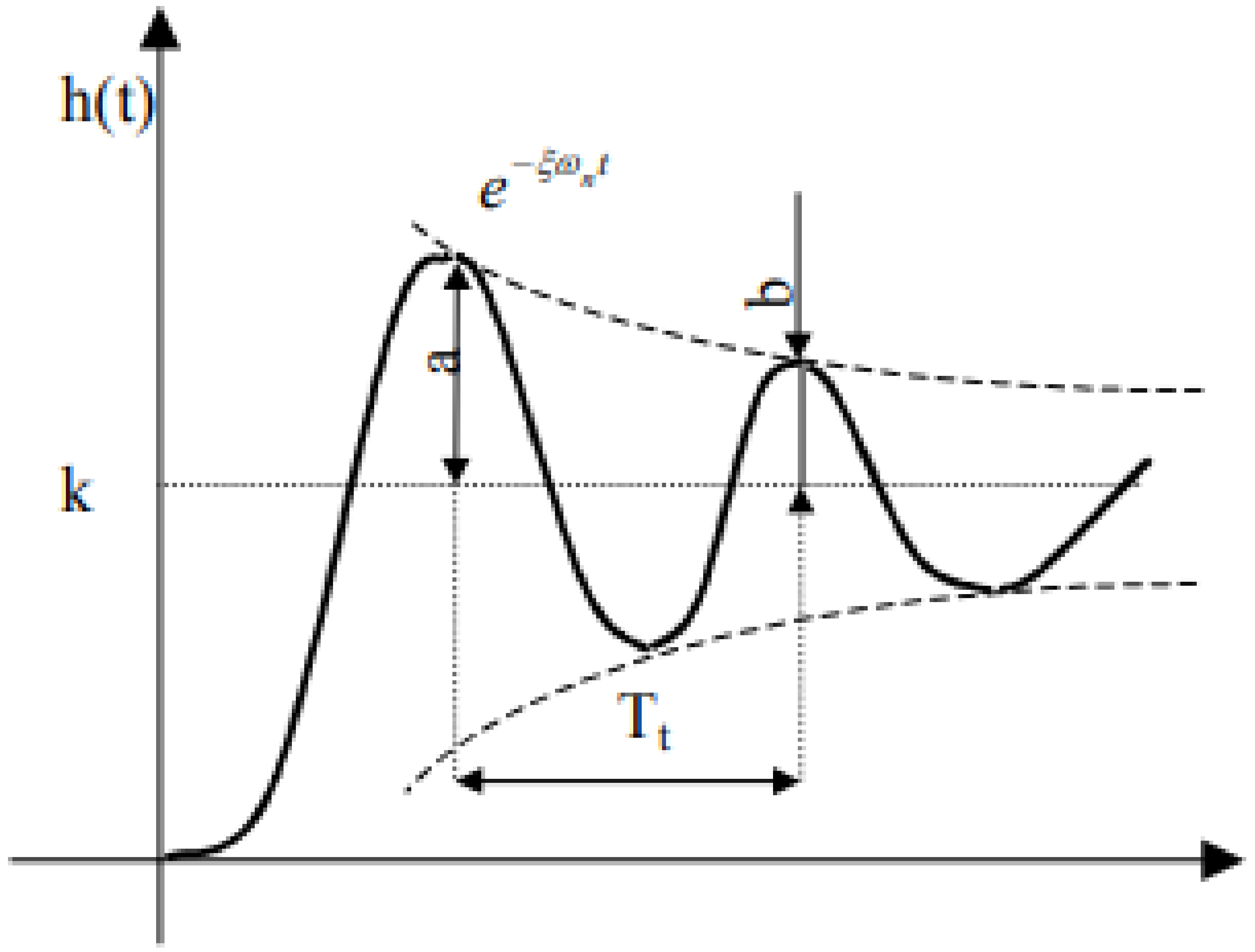


Człon oscylacyjny

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k\omega_n^{\,2}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^{\,2}}\frac{1}{s}\right]$$

$$h(t) = k\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_w t + \varphi)\right]$$

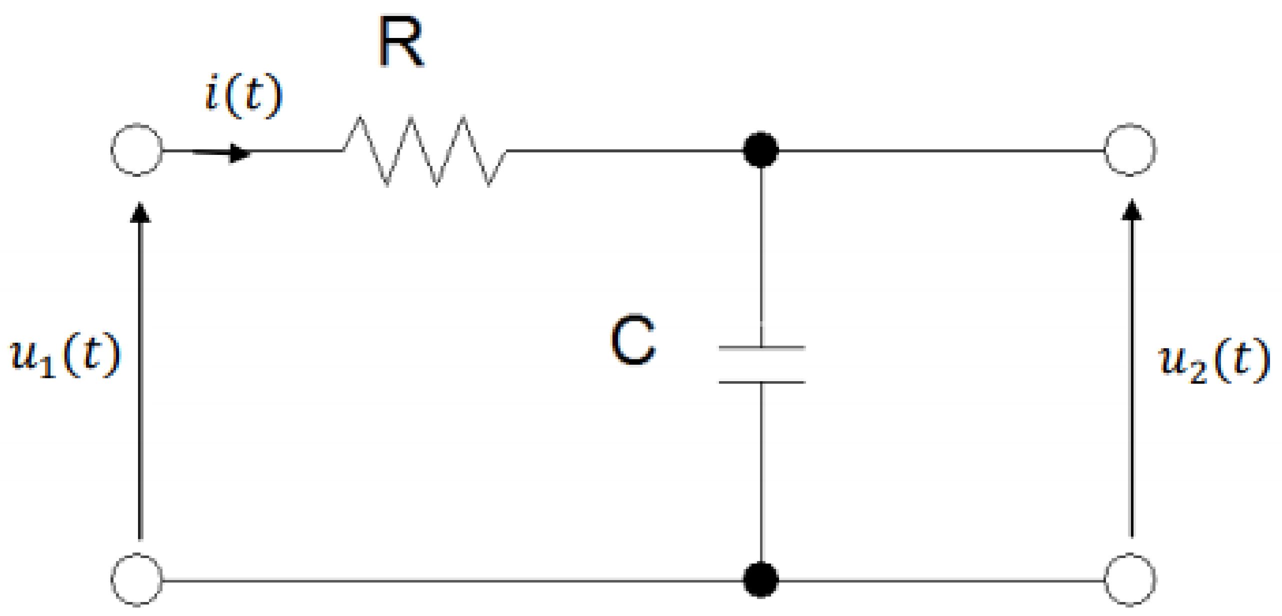
$$\lim_{t \to \infty} h(t) = k$$



Przykłady

Przykład I

Oblicz charakterystykę skokową przedstawionego układu RC



$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot s}$$

Oczywiście, odpowiedź skokowa daje się opisać równaniem

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\}$$

Przykład I

Należy obliczyć transformatę odwrotną z wyrażenia

$$H(s) = \frac{1}{s(RCs+1)}$$

Na początku przeprowadzimy rozkład na ułamki proste

$$\frac{1}{s(RCs+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(RCs+1)}$$

$$\frac{1}{s(RCs+1)} = \frac{A(RCs+1)+Bs}{s(RCs+1)}$$

$f(t),\ t \geqslant 0$	$F(s)$
$\delta(t)$ unit impulse	1
$1(t)$ unit step	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-bt}	$\frac{1}{s+b}$
$1-e^{-bt}$	$\frac{b}{s(s+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega}$
$a \cdot f(t)$	$a \cdot F(s)$
$x(t)+y(t)$	$X(s)+Y(s)$
$x(t)*y(t)$ convolution	$X(s) \cdot Y(s)$
$\frac{dy(t)}{dt}$	$sY(s)-y(0)$
$\frac{d^2y(t)}{dt^2}$	$s^2Y(s)-sy(0)-\frac{dy(0)}{dt}$
$\frac{d^ny(t)}{dt^n}$	$s^nY(s)-\frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}-s\frac{d^{n-2}y(0)}{dt^{n-2}}-\ldots-s^{n-1}y(0)$

Przykład I

$$\frac{1}{s(RCs+1)} = \frac{A(RCs+1)+Bs}{s(RCs+1)}$$

$$\Downarrow$$

$$ARCs + A + Bs = 1$$

$$\Downarrow$$

$$A = 1, B = -RC$$

$$\Downarrow$$

$$H(s) = \boxed{\frac{1}{s}} - \boxed{\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}}$$

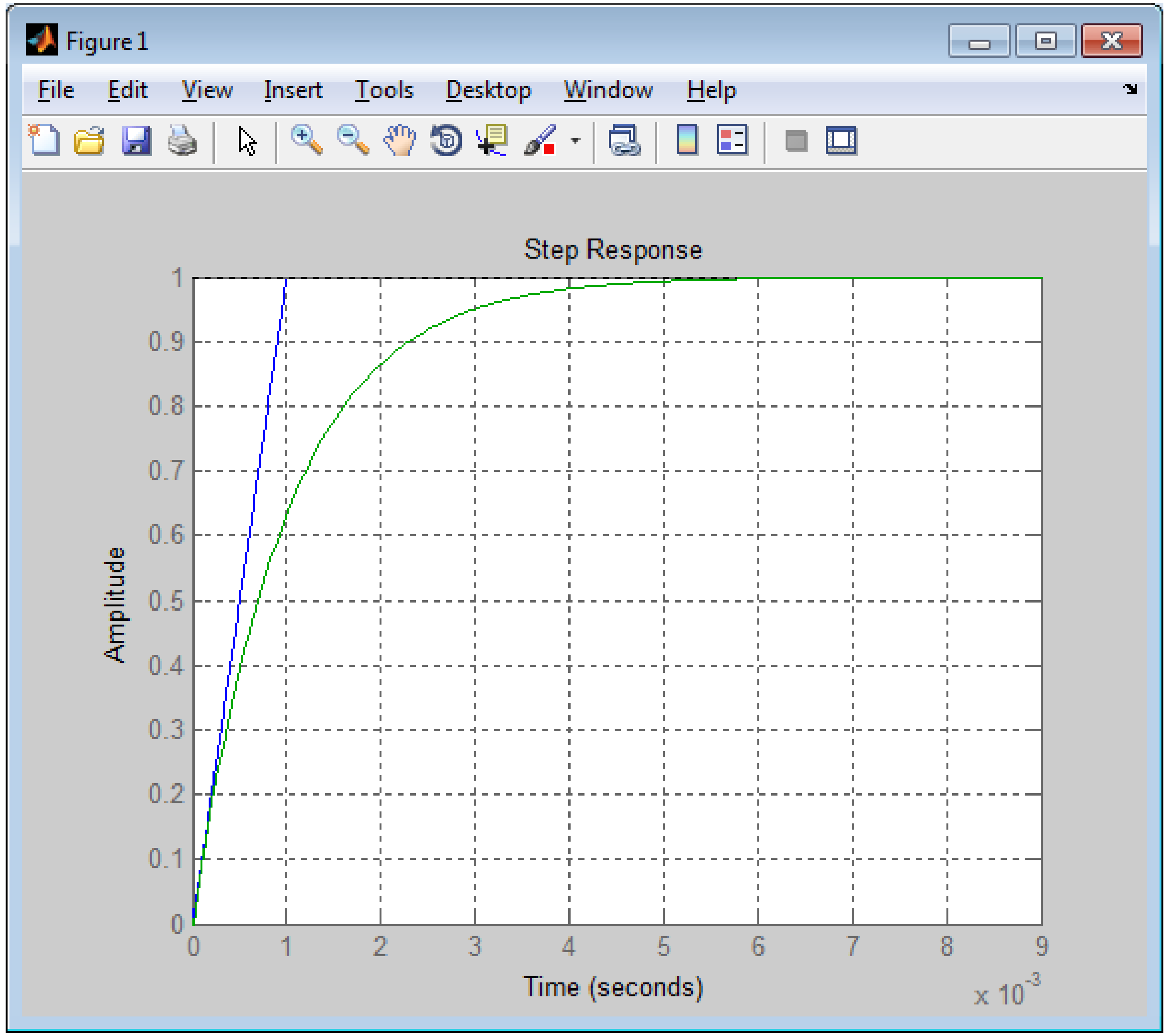
$f(t),\ t \geqslant 0$	$F(s)$
$\delta(t)$ unit impulse	1
$1(t)$ unit step	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-bt}	$\frac{1}{s+b}$
$1-e^{-bt}$	$\frac{b}{s(s+b)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sinh(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2-\omega}$
$\cosh(\omega t)$	$\frac{s}{s^2-\omega}$
$a \cdot f(t)$	$a \cdot F(s)$
$x(t)+y(t)$	$X(s)+Y(s)$
$x(t)*y(t)$ convolution	$X(s) \cdot Y(s)$
$\frac{dy(t)}{dt}$	$sY(s)-y(0)$
$\frac{d^2y(t)}{dt^2}$	$s^2Y(s)-sy(0)-\frac{dy(0)}{dt}$
$\frac{d^ny(t)}{dt^n}$	$s^nY(s)-\frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}-s\frac{d^{n-2}y(0)}{dt^{n-2}}-\ldots-s^{n-1}y(0)$

Przykład I

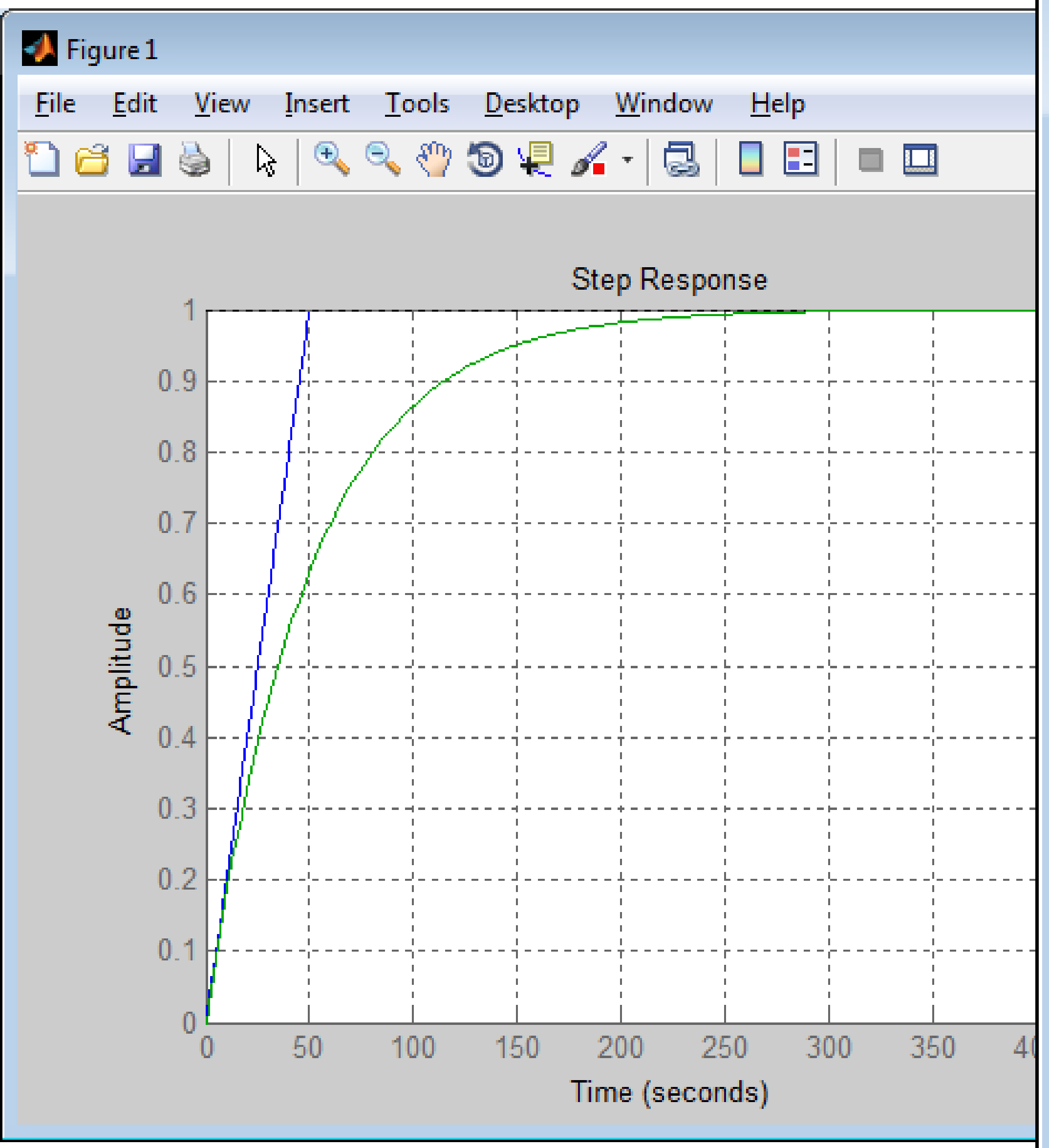
$$H(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$

$$h(t)=(1-e^{-\frac{t}{RC}})1(t)$$

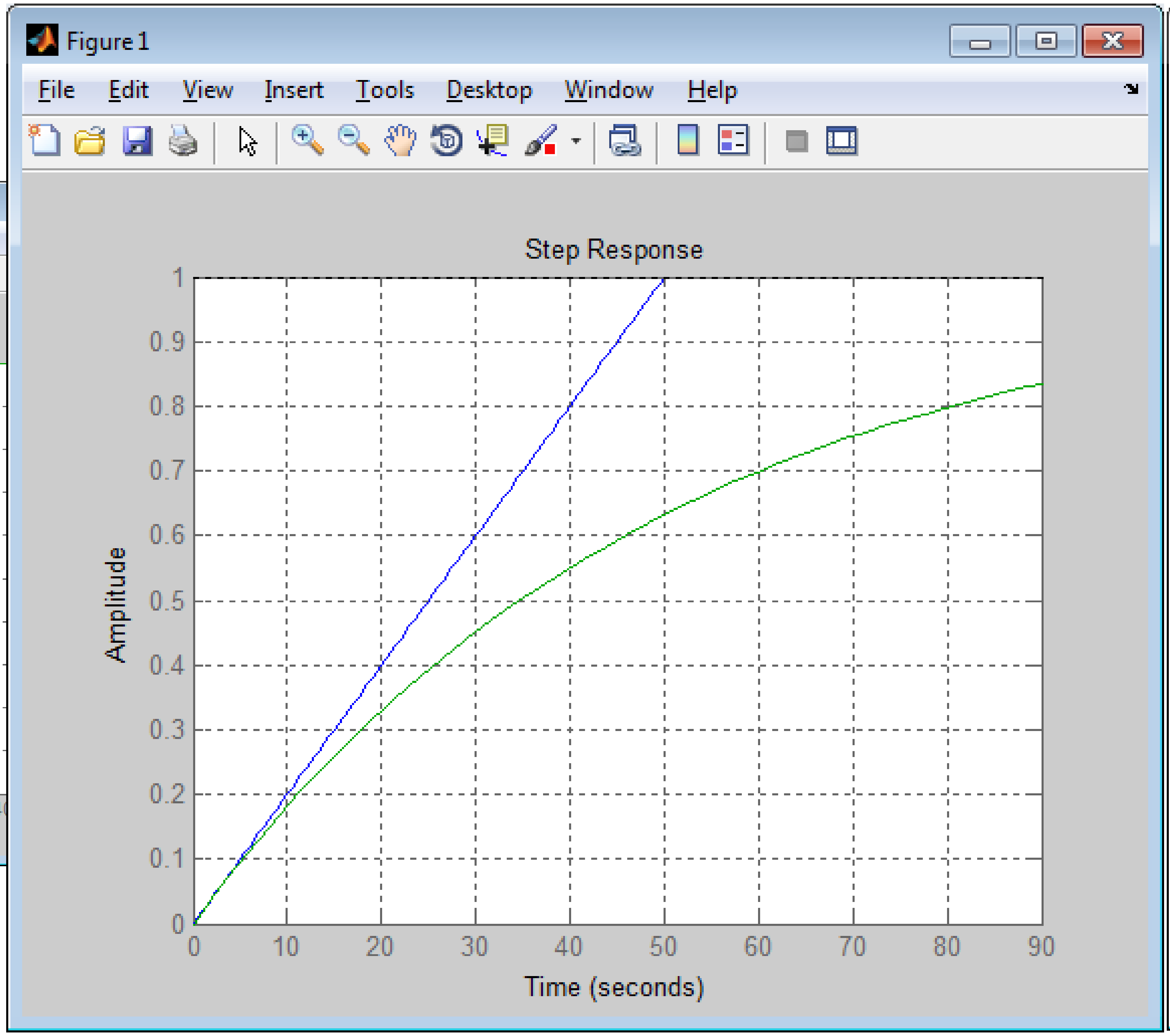
R=1,C=0.001



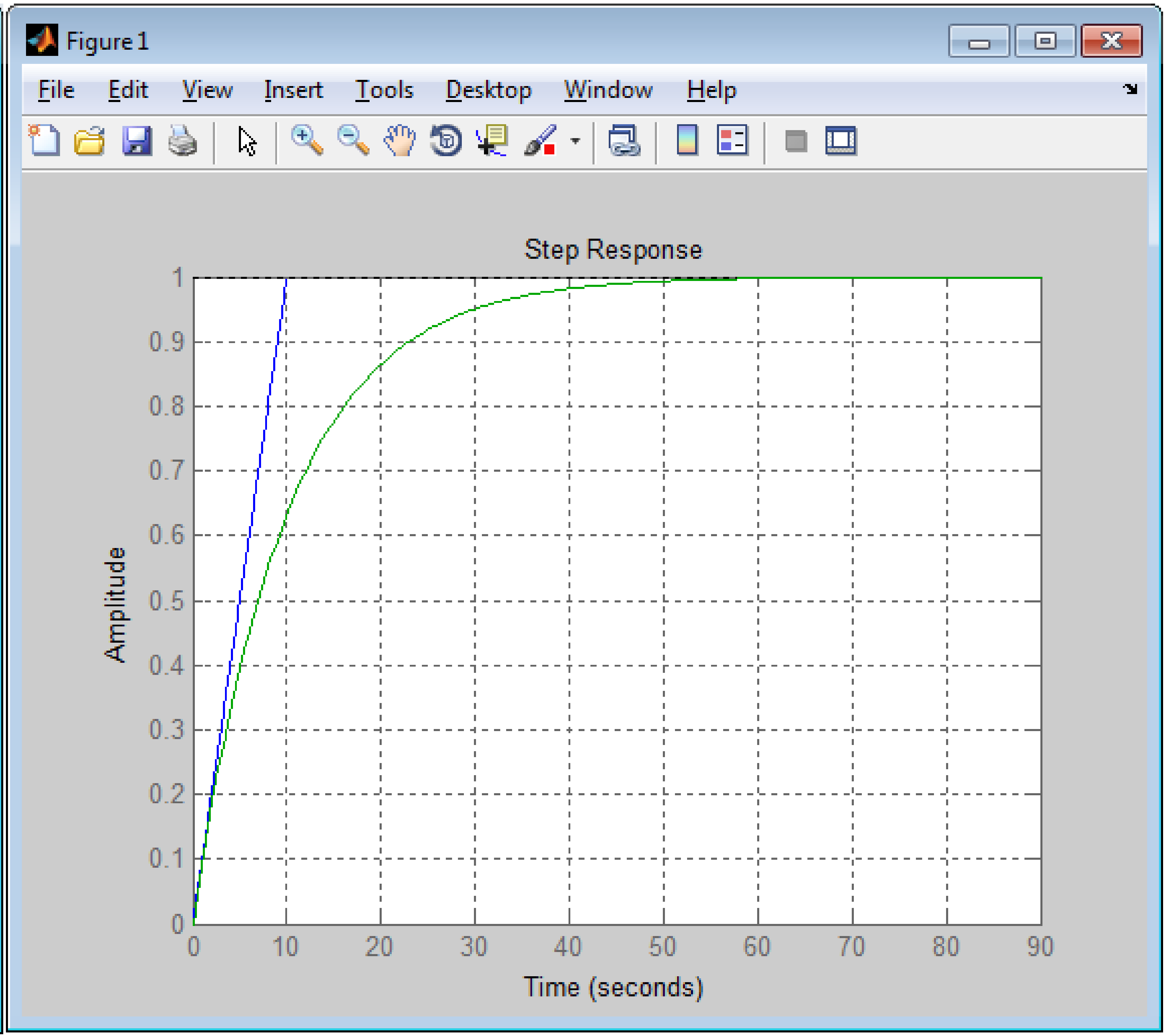
Przykład I



R=100,C=0.5



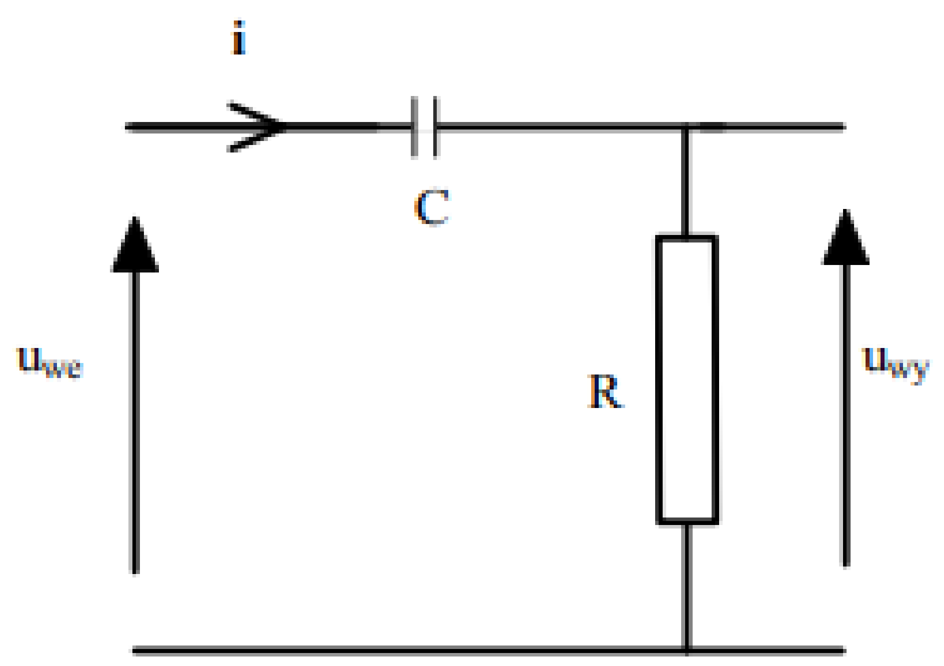
R=100,C=0.1



Przykład II

W tym przypadku rozpatrujemy rzeczywisty człon różniczkujący opisany równaniem

$$CR\frac{du_{wy}}{dt}+u_{wy}=CR\frac{du_{we}}{dt}$$



$$G(s)=\frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)}=\frac{ks}{Ts+1},$$

$$k=RC$$
$$T=RC$$

Przykład II

Obliczmy teraz odpowiedź takiego układu na skok jednostkowy

$$H(s) = \frac{ks}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{RC}{RCs+1}$$

$$H(s) = \frac{RC}{RCs+1} = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Przykład II

$$H(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$h(t) = e^{-\frac{t}{RC}} 1(t)$$