Modele systemów analogowych

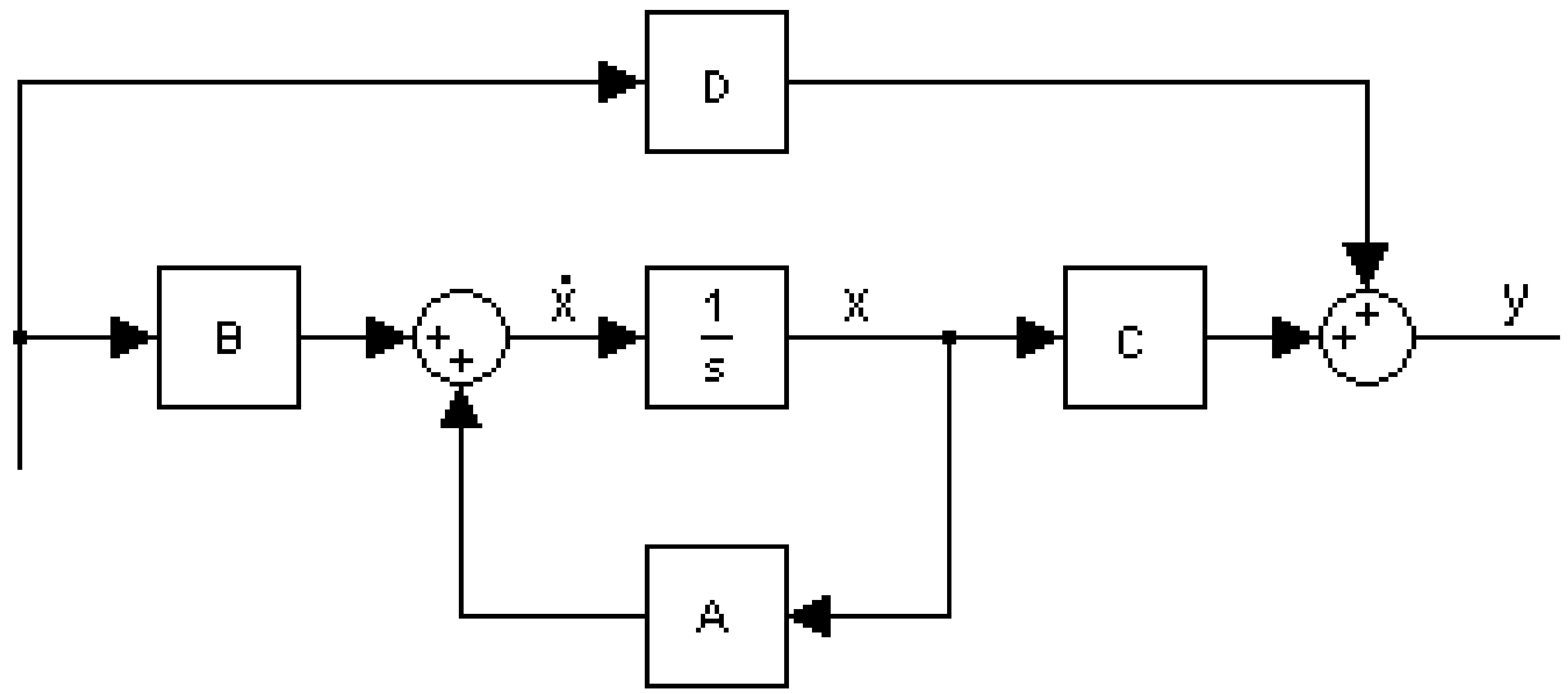
Czym jest modelowanie?

Modelowanie matematyczne – użycie języka matematyki do opisania zachowania jakiegoś układu (na przykład układu automatyki, biologicznego, ekonomicznego, elektrycznego, mechanicznego, termodynamicznego).

Praktyka inżynierska często wymaga sterowania układem lub wykonania analizy jego zachowania, do czego używa się modelowania matematycznego. W analizie inżynier buduje opisowy model układu będący hipotezą co do sposobu działania układu i na podstawie tego modelu może wnioskować co do wpływu potencjalnych zakłóceń na stan układu. W sterowaniu model może posłużyć do teoretycznego wypróbowania różnych strategii sterowania bez wpływania na rzeczywisty układ.

za: wikipedia.pl

Model jest pewnego rodzaju uproszczeniem otaczającej nas rzeczywistości. Na potrzeby sterowania zazwyczaj modeluje się za pomocą aparatu matematycznego.



Równania różniczkowe

Za pomocą równań różniczkowych opisywane są zależności pomiędzy rozważaną zmienną a jej pochodnymi. Przykładem takiego opisu może być równanie wahadła

$$\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \frac{k}{ml}\frac{d\alpha(t)}{dt} + \frac{g}{l} sin\,\alpha(t) = \frac{1}{ml^2}M(t)$$

gdzie: l - długość wahadła, m - masa wahadła,
g – przyśpieszenie grawitacyjne, k - współczynnik tarcia

Transmitancja operatorowa

Transmitancja operatorowa jest stosunkiem transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Transmitancja jest modelem układu – określa ogólne własności stacjonarnego układu liniowego. W związku z faktem, iż w rzeczywistości mało jest obiektów liniowych, taka transmitancja stanowi pewne przybliżenie rzeczywistości

Transmitancja widmowa

Transmitancję widmową uzyskuje się poprzez podstawienie s = jω.

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$

Transmitancja widmowa to stosunek wartości zespolonej odpowiedzi układu wywołanej wymuszeniem sinusoidalnym, do wartości zespolonej tego wymuszenia, w stanie ustalonym.
Co więcej, pozwala ona na wykreślenie charakterystyk częstotliwościowych, podobnie jak w omawianej wcześniej transformacji Fouriera.

POLITECHNIKA OPOLSKA

WEAiI

Opis w przestrzeni stanu

Metoda opisu obiektów dynamicznych z uwzględnieniem tzw. zmiennych stanu. Zasadniczo opis składa się z równania stanu

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

oraz równania wyjścia

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Zasadniczą zaletą opisu w przestrzeni stanu jest możliwość uwzględnienia warunków początkowych $\mathbf{x}(0)$.

Równoważność opisów

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

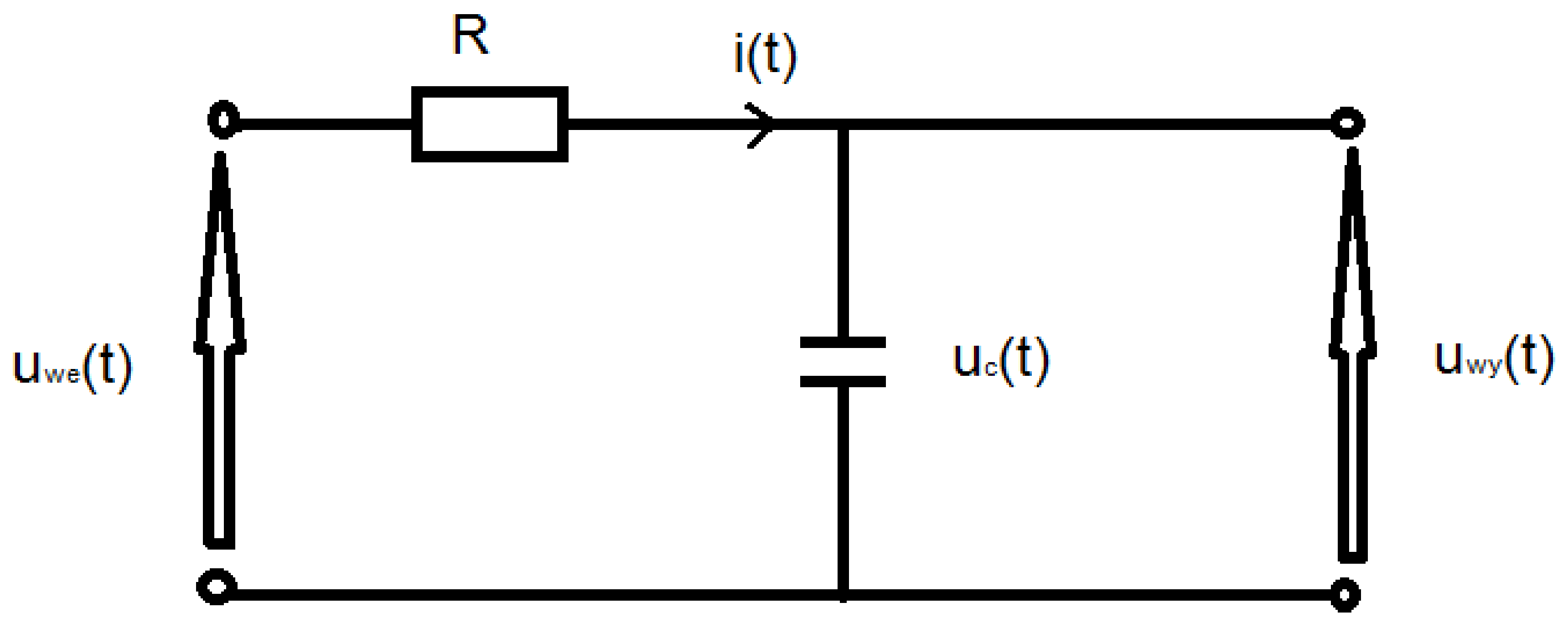
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Naturalnie, istnieje jednoznaczne przejście pomiędzy opisem w przestrzeni stanu a opisem transmitancyjnym. Przejście to dane jest wzorem

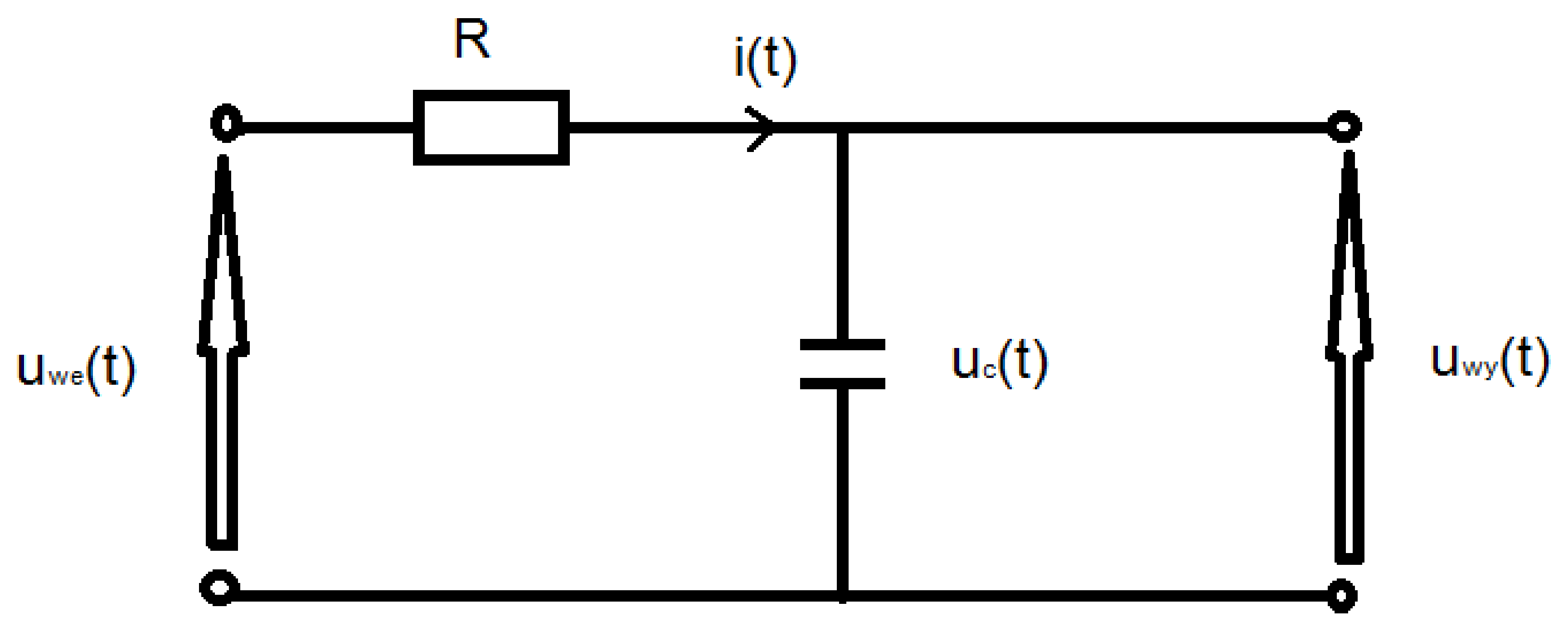
$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Przykładowe zadanie

Równania różnicowe

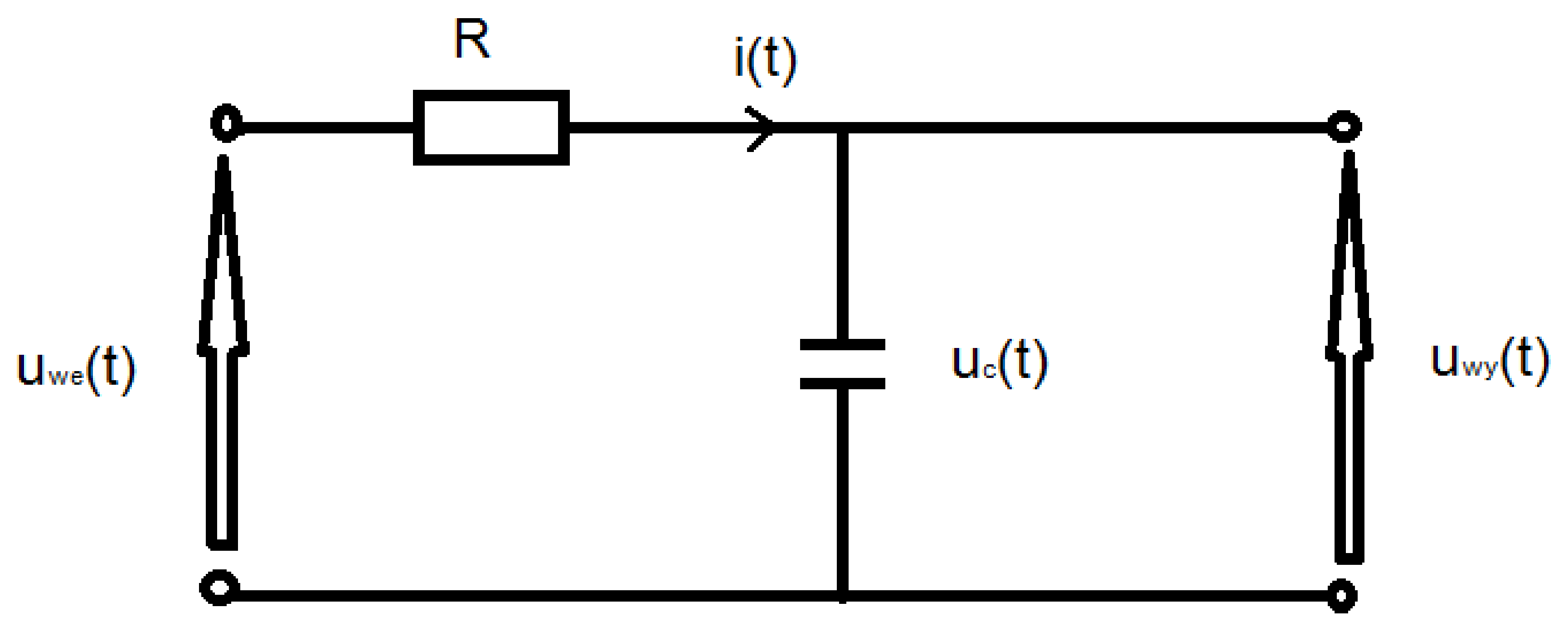


$$u_{we}(t) = Ri(t) + u_c(t)$$



$$u_{we}(t) = Ri(t) + u_c(t)$$

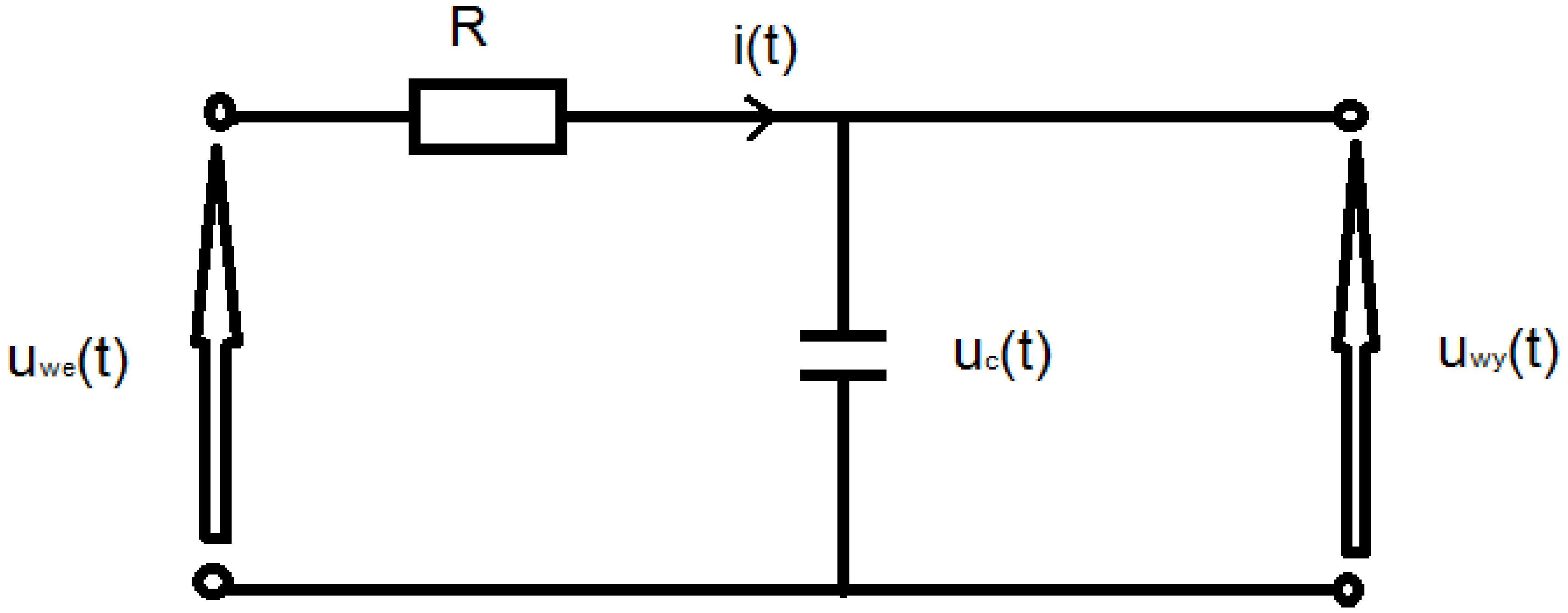
$$u_{wy}(t) = u_c(t)$$



$$u_{we}(t) = Ri(t) + u_c(t)$$

$$u_{wy}(t) = u_c(t)$$

$$i(t) = C\frac{du_{wy}}{dt}$$



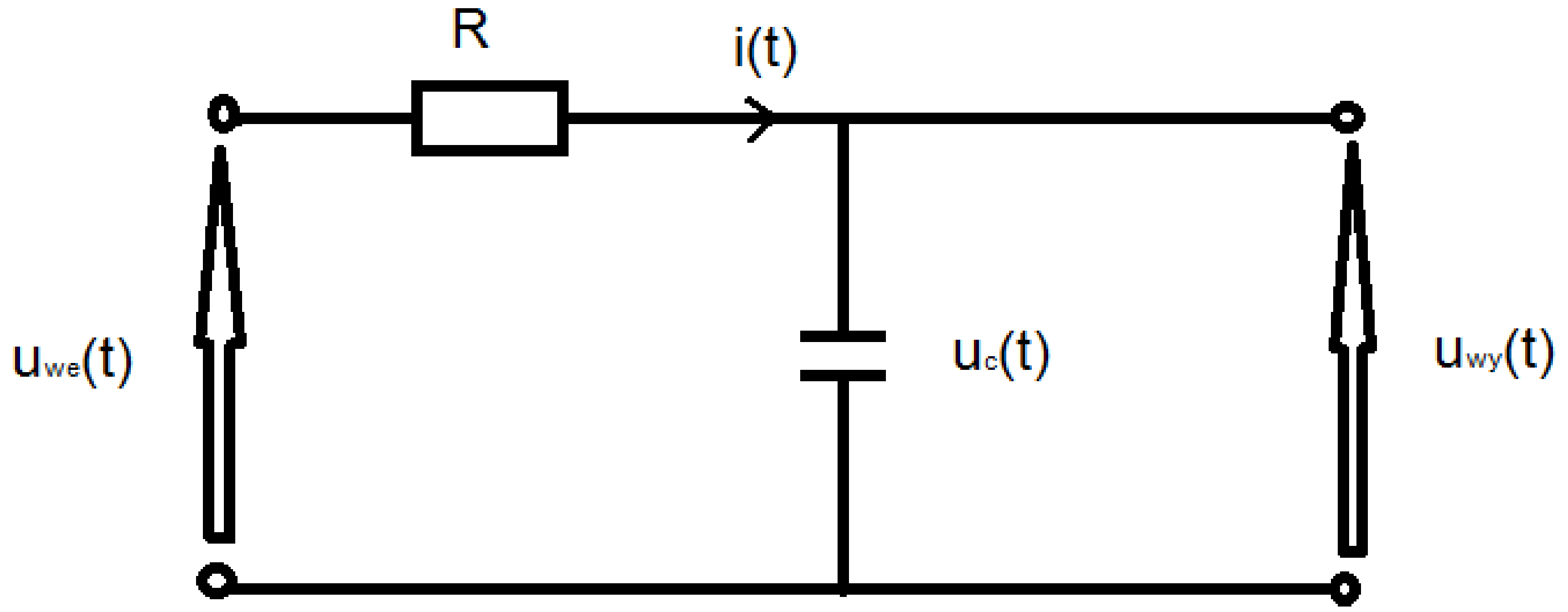
$$u_{we}(t) = Ri(t) + u_c(t)$$

$$u_{wy}(t) = u_c(t)$$

$$i(t) = C\frac{du_{wy}}{dt}$$

$$u_{we}(t) = RC\frac{du_{wy}}{dt} + u_c(t)$$

Równania różnicowe



$$u_{we}(t) = Ri(t) + u_c(t)$$

$$u_{wy}(t) = u_c(t)$$

$$i(t) = C\frac{du_{wy}}{dt}$$

$$u_{we}(t) = RC\frac{du_{wy}}{dt} + u_c(t) \xrightarrow{T = RC} T\frac{du_{wy}}{dt} + u_{wy}(t) = u_{we}(t)$$

Transmitancja operatorowa

Teraz obliczymy transformatę operatorową, przekształcając opis w dziedzinę operatora zespolonego s.

$$T\frac{du_{wy}}{dt} + u_{wy}(t) = u_{we}(t) \longrightarrow TsU_{wy}(s) + U_{wy}(s) = U_{we}(s)$$

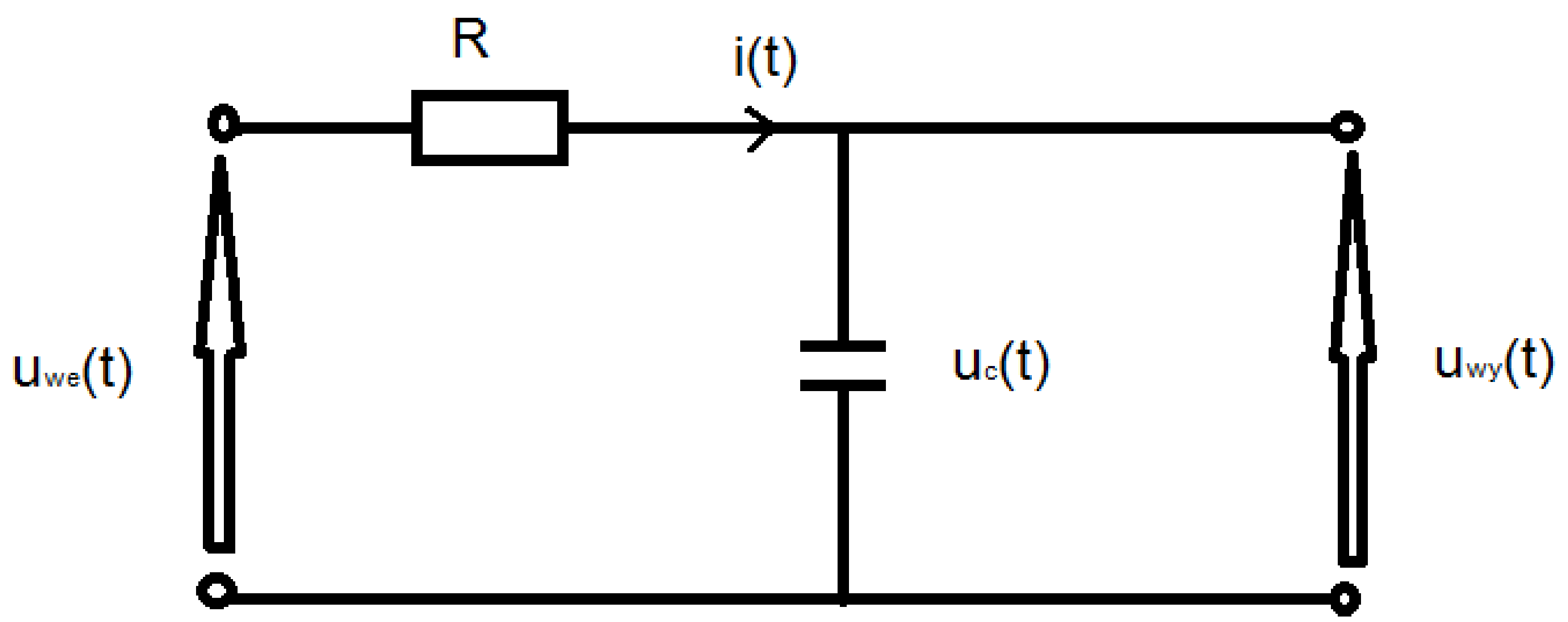
Teraz obliczymy transformatę operatorową, przekształcając opis w dziedzinę operatora zespolonego s.

$$T\frac{du_{wy}}{dt} + u_{wy}(t) = u_{we}(t) \longrightarrow TsU_{wy}(s) + U_{wy}(s) = U_{we}(s)$$

Transmitancja operatorowa określana jest jako stosunek transformat sygnału wyjściowego do transformaty sygnału wejściowego.

$$\frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{1}{Ts+1}$$

Opis w przestrzeni stanu



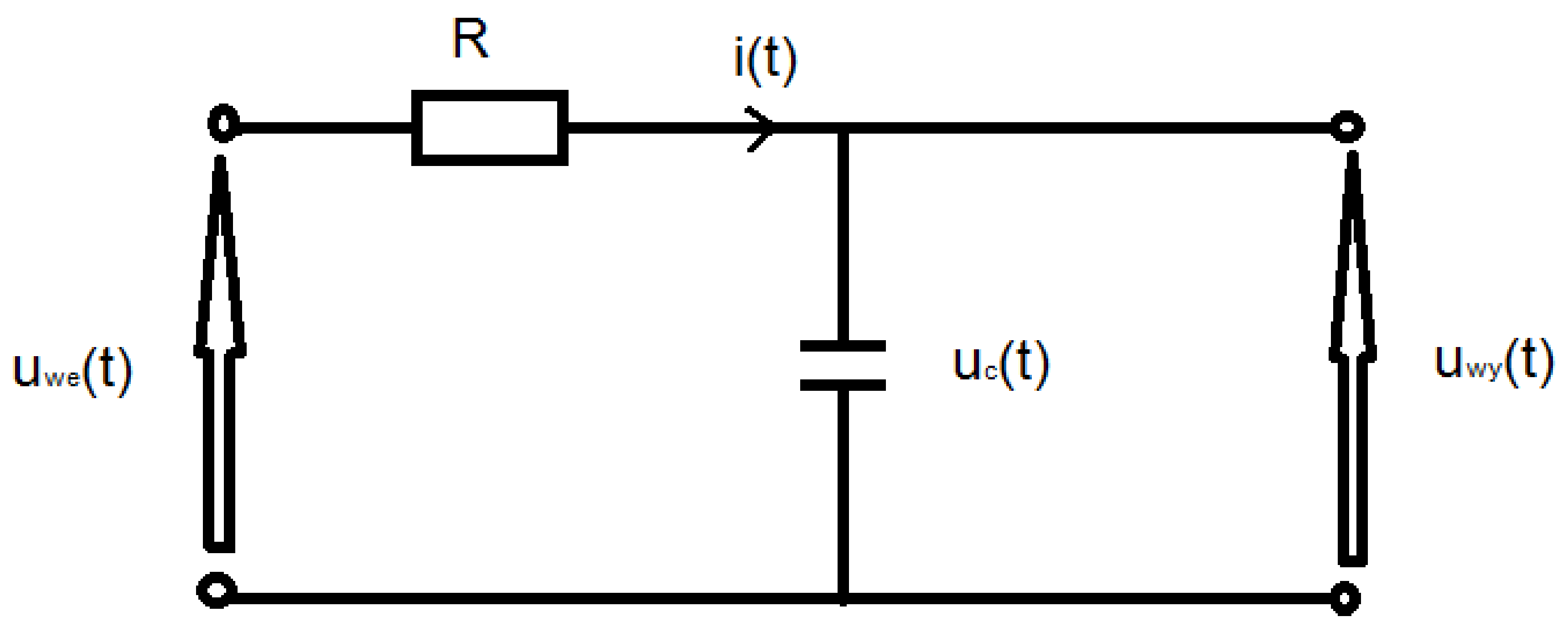
$$u_{we}(t) = Ri(t) + u_c(t)$$

$$u_{wy}(t) = u_c(t)$$

$$i(t) = C\frac{du_{wy}}{dt}$$

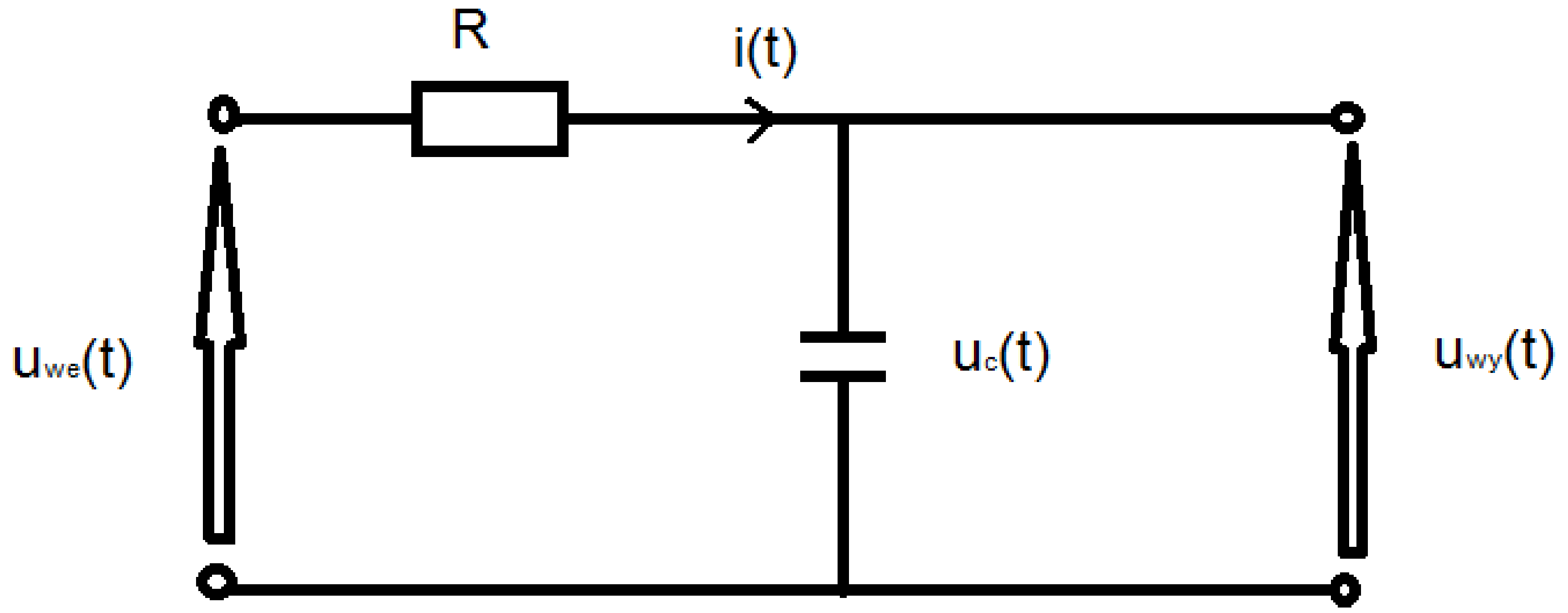
$$u_{we}(t) = RC\frac{du_{wy}}{dt} + u_c(t) \xrightarrow{T = RC} T\frac{du_{wy}}{dt} + u_{wy}(t) = u_{we}(t)$$

Opis w przestrzeni stanu



$$T\frac{du_{wy}}{dt}+u_{wy}(t)=u_{we}(t)$$

Opis w przestrzeni stanu



$$T\frac{du_{wy}}{dt} + u_{wy}(t) = u_{we}(t) \longrightarrow \frac{du_{wy}}{dt} = -\frac{1}{T}u_{wy}(t) + \frac{1}{T}u_{we}(t)$$

Opis w przestrzeni stanu

$$\frac{du_{wy}}{dt} = -\frac{1}{T}u_{wy}(t) + \frac{1}{T}u_{we}(t)$$

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

gdzie u_{wy} jest tutaj zmienną stanu, a macierze

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{T}, \ \mathbf{B} = \frac{1}{T}$$

Mamy więc opisany obiekt ciągły za pomocą trzech różnych metod: równania różniczkowego, transmitancji operatorowej i w przestrzeni stanu.

Na przyszłych zajęciach

-Rozwiązanie 2 (max 3) czwórników napięciowych (prądowych)
- Charakterystyki czasowe ciągłych układów liniowych

Do przypomnienia:

-Zależności pomiędzy wielkościami w elementach układu RLC
- obliczanie połączeń szeregowych i równoległych