Transformata Laplace'a

Transformata Laplace'a

Jednostronną transformatą funkcji f(t) nazywamy następującą funkcję

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Gdzie s – operator Laplace'a, określany też częstotliwością zespoloną

$$s = \sigma + j\omega$$

Transformata Laplace'a

Transformata Laplace'a jest obrazem funkcji *f(t)* w dziedzinie zespolonego parametru *s*. Transformacja Fouriera przekształcała funkcję f(t) w dziedzinę częstotliwości.

Wiedząc, że s jest sumą częstotliwości rzeczywistej i urojonej można zauważyć, że transformacja Fouriera jest szczególnym przypadkiem transformacji Laplace'a!

Podstawowe własności

- Liniowość $\mathcal{L}(af(t)+bg(t)) = \mathcal{L}(af(t)) + \mathcal{L}(bg(t))$
- Transformata pochodnej $\mathcal{L}(\frac{df}{dt}) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)^{+}$
- Transformata całki $\mathcal{L}(\int_0^t f(\tau)d\tau = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(s))$

Wszystkie własności

	Oryginał $h(t)$	Obraz $\mathcal{L}[h(t)](s)$	Uwagi
liniowość	$\alpha f(t)+\beta g(t)$	$\alpha\mathcal{L}[f(t)](s)+\beta\mathcal{L}[g(t)](s)$	
przesunięcie w dziedzinie oryginału	$\chi(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s)$	$a>0$
przesunięcie w dziedzinie obrazu	$f(t)e^{-at}$	$\mathcal{L}[f(t)](s+a)$	$a\in\mathbb{R}$
skalowanie	$f(at)$	$\frac{1}{a}\mathcal{L}[f(t)]\left(\frac{s}{a}\right)$	$a>0$
pochodna obrazu	$(-1)^m t^m f(t)$	$\mathcal{L}[f(t)]^{(m)}(s)$	$m\in\mathbb{N}$
pochodna oryginału	$f^{(m)}(t)$	$s^m\mathcal{L}[f(t)](s)-\sum\limits_{k=1}^{m}s^{m-k}f^{(k-1)}(0+)$	$m\in\mathbb{N}$
całka obrazu	$\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_s^\infty\mathcal{L}[f(t)](x)dx$	
transformata całki oryginału	$\int\limits_0^t f(x)dx$	$\frac{\mathcal{L}[f(t)](s)}{s}$	
splot	$(f*g)(t)$	$\mathcal{L}[f(t)](s)\cdot\mathcal{L}[g(t)](s)$	

Transformaty przykładowych sygnałów

- $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$
- $\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2}$
- $\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{s^3}$
- $\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$
- $\mathcal{L}(te^{at}) = \frac{1}{(s-a)^2}$
- $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$
- $\mathcal{L}(sin\omega t) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
- $\mathcal{L}(cos\omega t)) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$

Przykład 1