Teoria Sygnałów i Systemów

Modele systemów dyskretnych

Modele układów dyskretnych

Układ dyskretny - jest to obiekt, w którym przynajmniej jeden sygnał ma charakter dyskretny. Analogicznie do układów ciągłych, wykorzystuje się matematyczne zależności do opisu takich obiektów.

Równanie różnicowe

Równanie różnicowe jest dyskretnym odpowiednikiem równania różniczkowego:

$$y(i) + a_1 y(i-1) + \ldots + a_n y(i-n) = b_0 u(i-k) + b_1 u(i-k-1) + \ldots + b_n u(i-k-n)$$

Opisuje ono zależności zachodzące pomiędzy aktualnymi i przeszłymi wartościami prawej i lewej strony równania (wejść i wyjść)

Transformata Z

Transformata Z jest dyskretnym odpowiednikiem transformaty Laplace'a i jest obliczana poniższym wzorem

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) z^{-k},$$

przez z^{-k} oznaczamy operator opóźnienia $y(i)\, z^{-k} = y(i - k)$

δ_n	1	$\frac{(n+k)!}{k!n!}\lambda^n$	$\frac{z^{k+1}}{(z-\lambda)^{k+1}}$
1_n	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{k!}\mathcal{D}^k\left\{\frac{(n+k)!}{n!}\lambda^n\right\}$	$\frac{z}{(z-\lambda)^{k+1}}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$\sin\omega n$	$\frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\cos\omega n$	$\frac{z^2-z\cos\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$
λ^n	$\frac{z}{z-\lambda}$	$n\sin\omega n$	$\frac{z(z^2-1)\sin\omega}{(z^2-2z\cos\omega+1)^2}$
$\frac{(n+1)(n+2)}{2}\lambda^n$	$\frac{z^2}{(z-\lambda)^2}$	$n\cos\omega n$	$\frac{z(z^2\cos\omega-2z+\cos\omega)}{(z^2-2z\cos\omega+1)^2}$

Ogólną formę równania różnicowego z użyciem transformaty *Z* można przekształcić do następującej postaci

$$y(i) + a_1 y(i-1) + \dots + a_n y(i-n) = b_0 u(i-k) + b_1 u(i-k-1) + \dots + b_n u(i-k-n)$$

$$\Downarrow$$

$$y(i)\ u(i) = z^{-d} B(z^{-1})\ A(z^{-1})\ (2)$$

gdzie $B(z^{-1})$, $A(z^{-1})$ są wielomianami zmiennej zespolonej z, natomiast d jest opóźnieniem układu.

Transmitancja dyskretna

Transmitancja dyskretna G(z) ukazuje stosunek transformaty Z sygnału wyjściowego do transformaty Z sygnału wejściowego: ´

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

oraz w formie wielomianu względem operatora opóźnienia z^{-1}

$$G(z) = z^{-d}\frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})}$$

Dyskretna przestrzeń stanu

$$x(k + 1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x0,$$
$$y(k) = Cx(k).$$

Analogicznie do systemów ciągłych, istnieje opis uwzględniający zmienne stanu. W przypadku ciągłym pierwsze równanie opisuje pochodną wektora zmiennych stanu - tutaj rozpatrywana jest nie ciągła pochodna, a dyskretny przyrost wartości.

Charakterystyki czasowe układów dyskretnych

Aby obliczyć odpowiedź układu na dowolne pobudzenie należy znać transmitancję G(z) obiektu oraz transformatę U(z) sygnału wejściowego.

Skoro

$$G(z) = Y(z)/U(z)$$

to

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

Obliczanie odpowiedzi dla przykładowego obiektu

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{Y(z^{-1})}{U(z^{-1})}$$

$$A(z^{-1})\,Y(z^{-1}) = B(z^{-1})\,U(z^{-1})$$

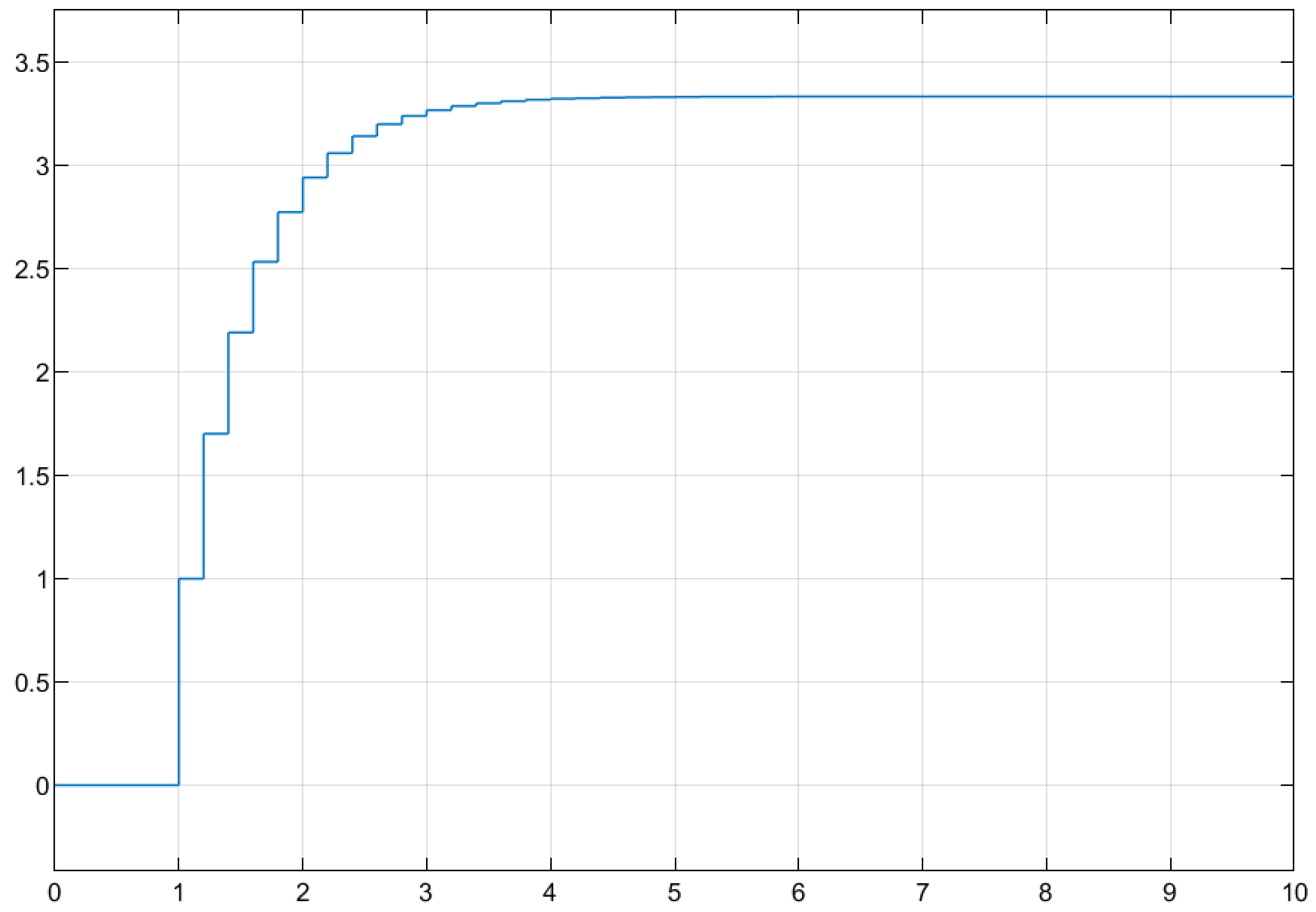
$$G(z^{-1}) = \frac{1}{1 - 0.7z^{-1}}$$

$$(1 - 0.7z^{-1})Y(z^{-1}) = U(z^{-1})$$

$$y(k) - 0.7y(k-1) = u(k)$$

k	u(k)	y(k-1)	y(k)
0	1	0	1
1	1	1	1.7
2	1	1.7	2.19
3	1	2.19	2.533
4	1	2.533	2.7731
5	1	2.7731	2.94117
6	1	2.94117	3.058819

k	u(k)	y(k-1)	y(k)
0	1	0	1
1	1	1	1.7
2	1	1.7	2.19
3	1	2.19	2.533
4	1	2.533	2.7731
5	1	2.7731	2.94117
6	1	2.94117	3.058819



Stabilność układów dyskretnych