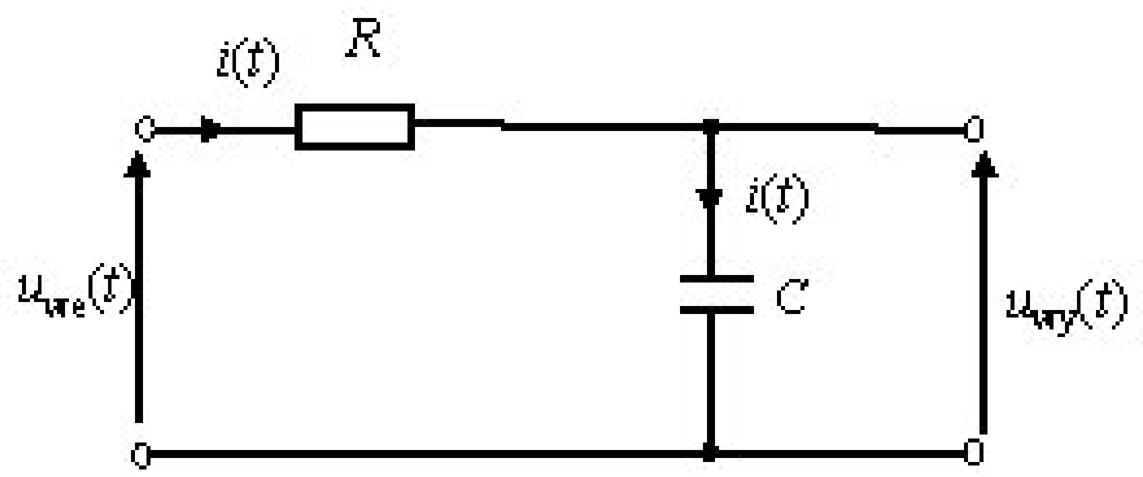
# Podstawy Automatyki

dr inż. Marek Krok

# Na tym wykładzie:

- Opis obiektów za pomocą równań stanu
- Transformata Laplace'a
- Opis obiektów za pomocą transmitancji operatorowej
- Charakterystyki czasowe
- Wyznaczanie odpowiedzi czasowej obiektów dynamicznych

# Model w postaci równań różniczkowych




$$u_{we}(t) = Ri(t) + u_{wy}(t) \qquad i(t) = C\frac{du_{wy}}{dt} \qquad u_{we}(t) = RC\frac{du_{wy}}{dt} + u_{wy}(t)$$

$$RC\frac{du_{wy}}{dt} + u_{wy}(t) = u_{we}(t) \qquad \boxed{T\frac{du_{wy}}{dt} + u_{wy}(t) = u_{we}(t)}$$

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y =$$
$$= b_m\frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + b_1\frac{du}{dt} + b_0 u$$

# Opis obiektów liniowych

## za pomocą zmiennych stanu

**Przykład 1**

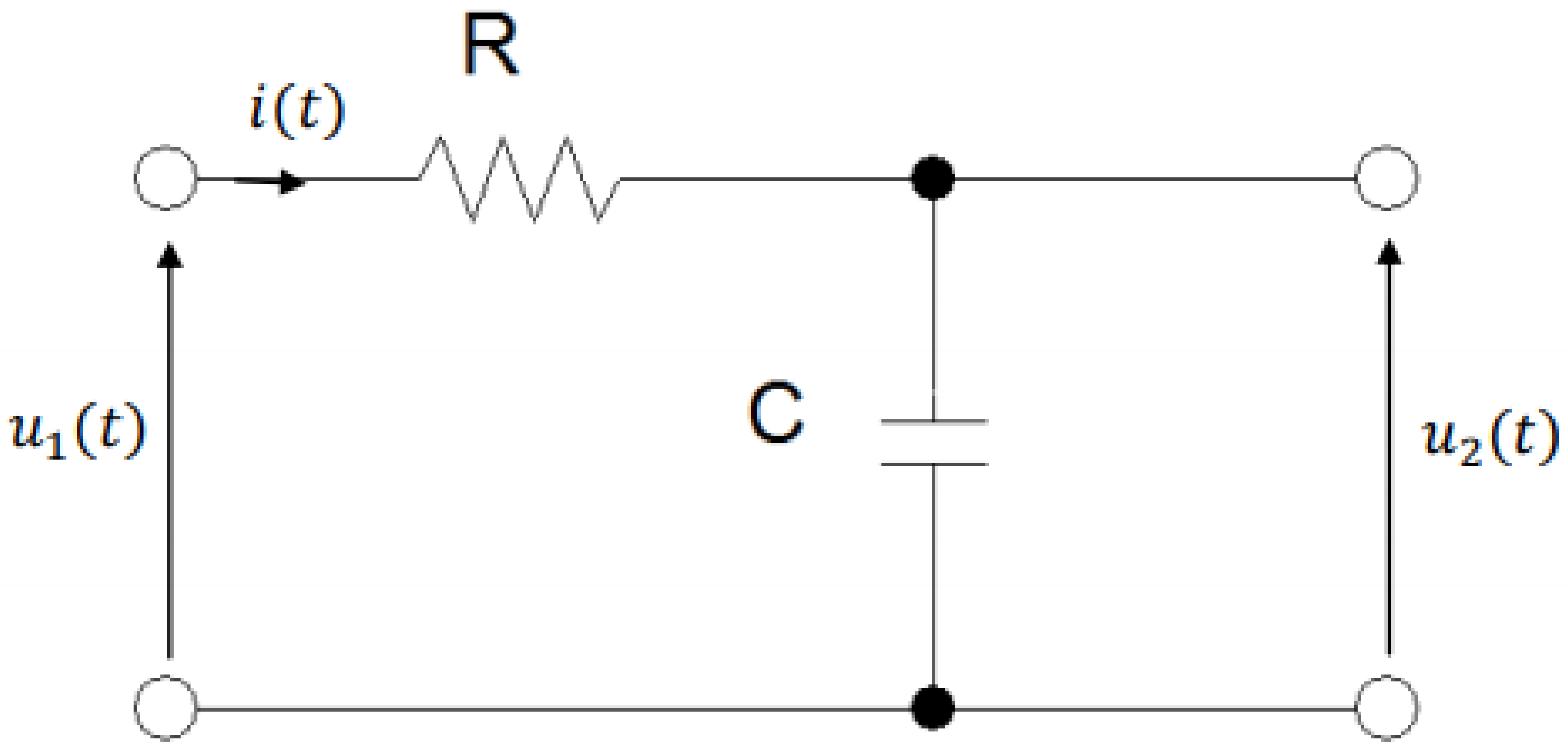
Opis w przestrzeni stanu (z wykorzystaniem zmiennych stanu)

Równanie stanu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

Równanie wyjścia

# Przykład 1




$$u_1(t) - R \cdot C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} - u_c(t) = 0$$

$$\frac{du_c(t)}{dt} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot u_c(t) + \frac{1}{R \cdot C} \cdot u_1(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

$$A = \left[-\frac{1}{R \cdot C}\right], B = \left[\frac{1}{R \cdot C}\right], C = [1], D = [0]$$

# Transformata Laplace'a

$$F(s) = \{\mathcal{L}f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$$
$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$$
$$\mathcal{L}\{a\} = a\frac{1}{s}$$
$$\mathcal{L}\{at\} = a\frac{1}{s^2}$$
$$\mathcal{L}\{at^n\} = a\frac{n!}{s^{n+1}} \qquad dla \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$
$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$
$$\mathcal{L}\{\sin(at+b)\} = \frac{a\cdot\cos b + s\cdot\sin b}{s^2+a^2}$$
$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2+a^2}$$
$$\mathcal{L}\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2+a^2}$$
$$\mathcal{L}\{\sinh(at+b)\} = \frac{\frac{1}{2}(a-s)e^{-b} + \frac{1}{2}(a+s)e^{b}}{s^2-a^2}$$
$$\mathcal{L}\{\sinh(at)\} = \frac{a}{s^2-a^2}$$
$$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2-a^2}$$
$$\mathcal{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$
$$\mathcal{L}\{e^{at}\sin(bt)\} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{t}{2b}\sin(bt)\right\} = \frac{s}{(s^2+b^2)^2}$$
$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos(bt)\} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$
$$\mathcal{L}\{\ln(at)\} = -\frac{\gamma + \ln(s) - \ln(a)}{s},$$

## Transmitancja operatorowa

Transmitancję **operatorową** G(s) definiujemy jako stosunek transformaty Laplace'a sygnału wyjściowego Y(s) do transformaty Laplace'a sygnału wejściowego U(s).

Model matematyczny obiektu w postaci **transmitancji operatorowej** łączy w jednym równaniu zależność miedzy sygnałem wejściowym a sygnałem wyjściowym.

# Transmitancja operatorowa

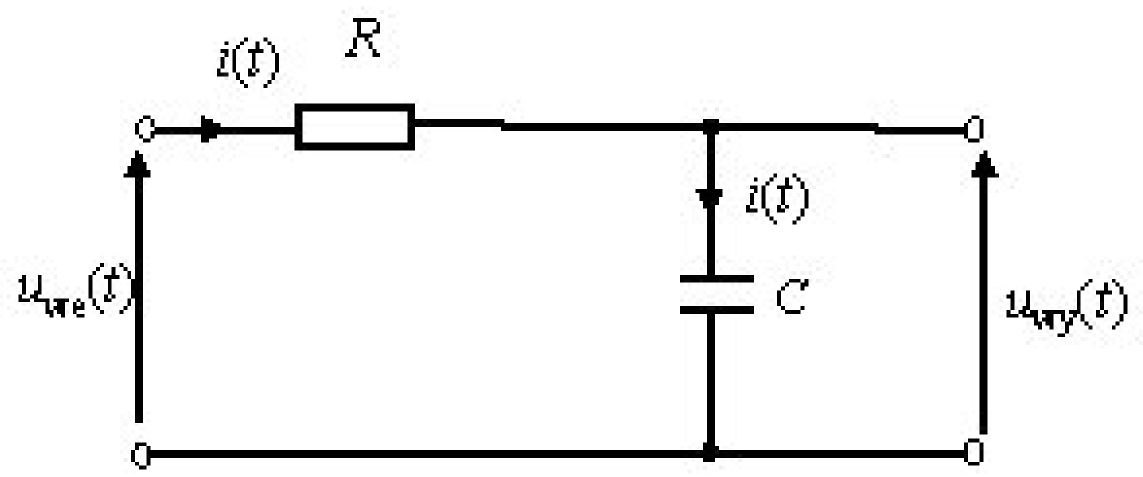
Postać z wykorzystaniem zespolonego operatora *s*:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Postać z wykorzystaniem transformaty Laplace’a:

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}\{y(t)\}}{\mathcal{L}\{u(t)\}}$$

# Model w postaci transmitancji operatorowej

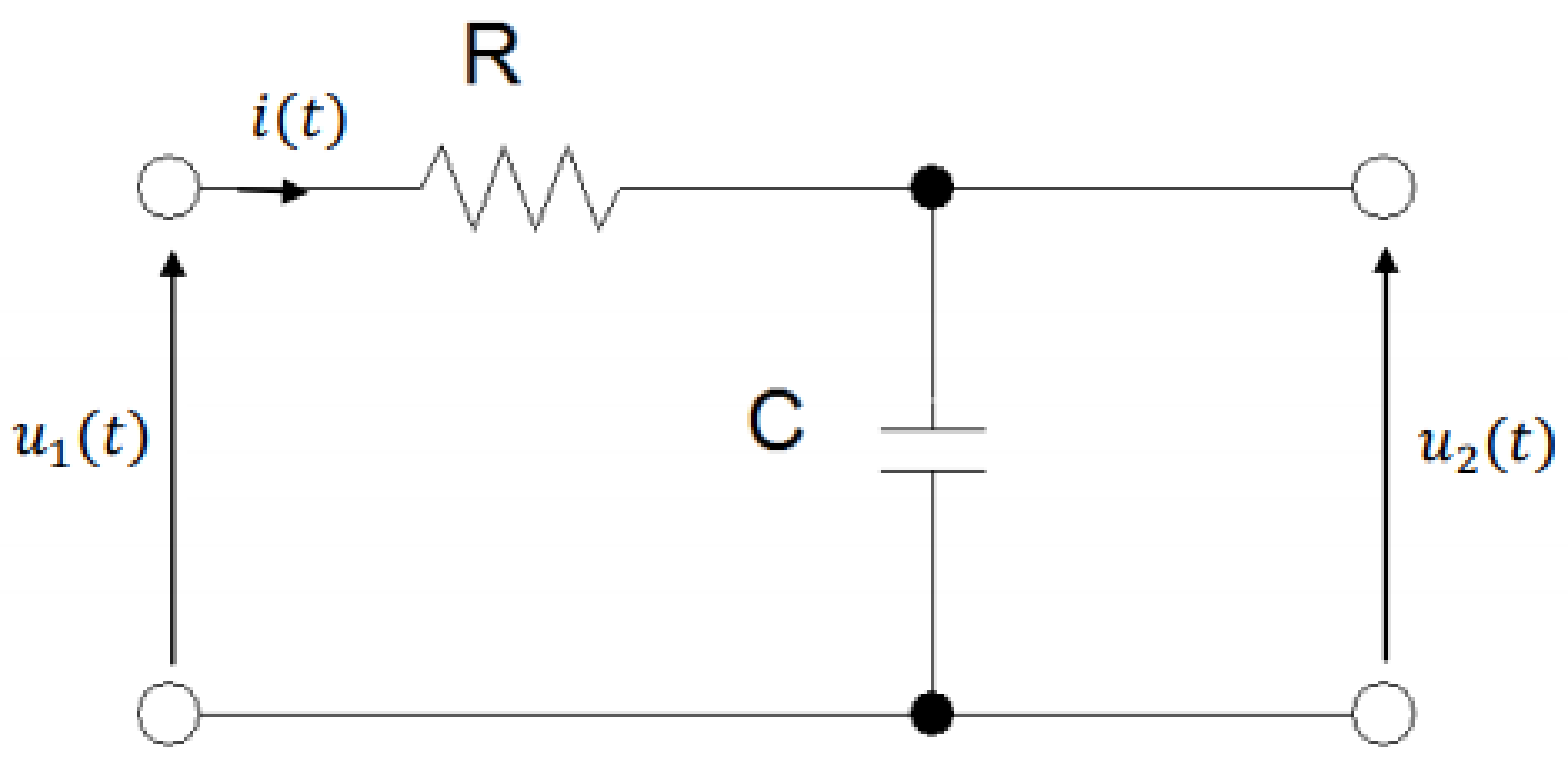



$$TsU_{wy}(s) + U_{wy}(s) = U_{we}(s) \qquad T = RC$$

$$\frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{1}{Ts+1} \qquad \boxed{G(s) = \frac{1}{Ts+1}}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

## Przykład 1




$$R \cdot C \cdot s \cdot U_2(s) + U_2(s) = U_1(s)$$

$$\Downarrow$$

$$(1 + R \cdot C \cdot s) \cdot U_2(s) = U_1(s)$$

$$\Downarrow$$

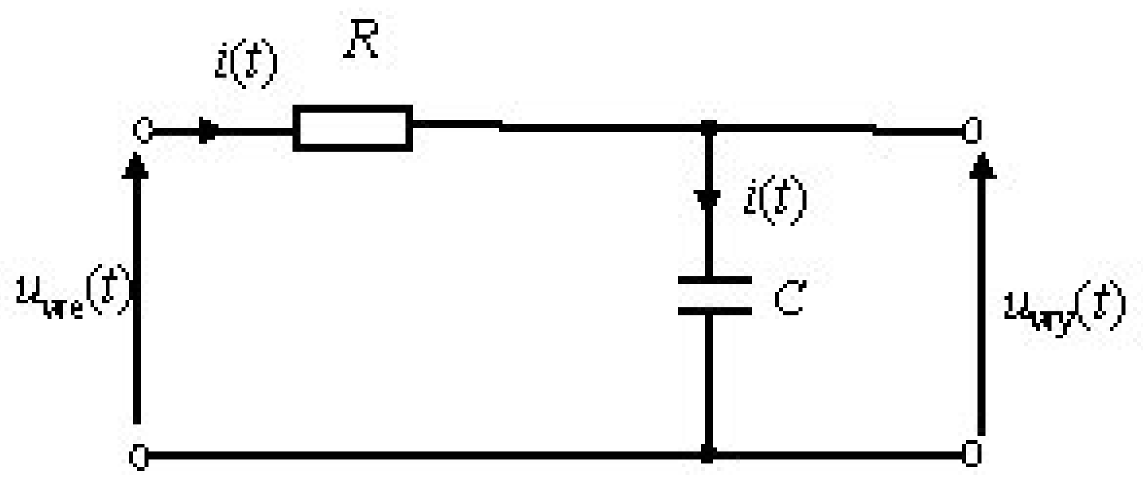
$$\boxed{G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot s}}$$

POLITECHNIKA OPOLSKA

WEAiI

# Równoważność modeli

$$TsU_{wy}(s)+U_{wy}(s)=U_{we}(s) \qquad T=RC \quad \longleftrightarrow \quad RC\frac{du_{wy}}{dt}+u_{wy}(t)=u_{we}(t)$$



# Równoważność modeli

Przejście między opisem w przestrzeni stanu a opisem transmitancyjnym

$$A = \left[-\frac{1}{R \cdot C}\right], B = \left[\frac{1}{R \cdot C}\right], C = [1], D = [0] \Longrightarrow G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot s}$$

$$G(s) = \mathbf{C}(sI - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

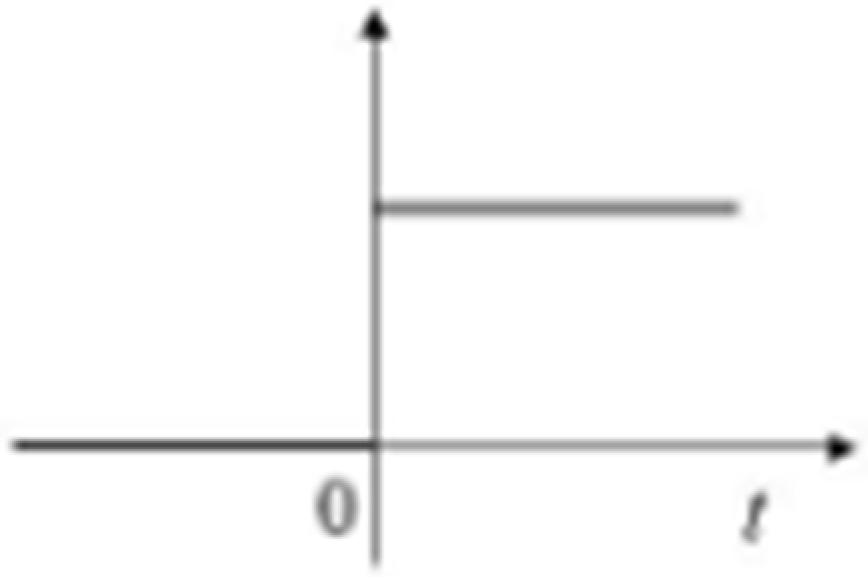
# Charakterystyki czasowe

# Wyznaczanie odpowiedzi czasowych

Odpowiedź układu można wyznaczyć posiadając znaną transmitancję operatorową układu oraz transformatę sygnału wejściowego. Zwyczajowo, spośród odpowiedzi czasowych wyznacza się dwie zasadnicze odpowiedzi

Odpowiedź impulsową:


Odpowiedź skokową:



# Charakterystyka impulsowa (odpowiedź impulsowa)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Rightarrow Y(s) = G(s)\,U(s)$$

W celu uzyskania charakterystyki impulsowej należy liniowy obiekt stacjonarny pobudzić sygnałem wejściowym w postaci

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases} \Longrightarrow U(s)=1$$

Dzięki tej własności otrzymujemy transformatę sygnału wyjściowego równą transmitancji obiektu

$$Y(s) = G(s)$$

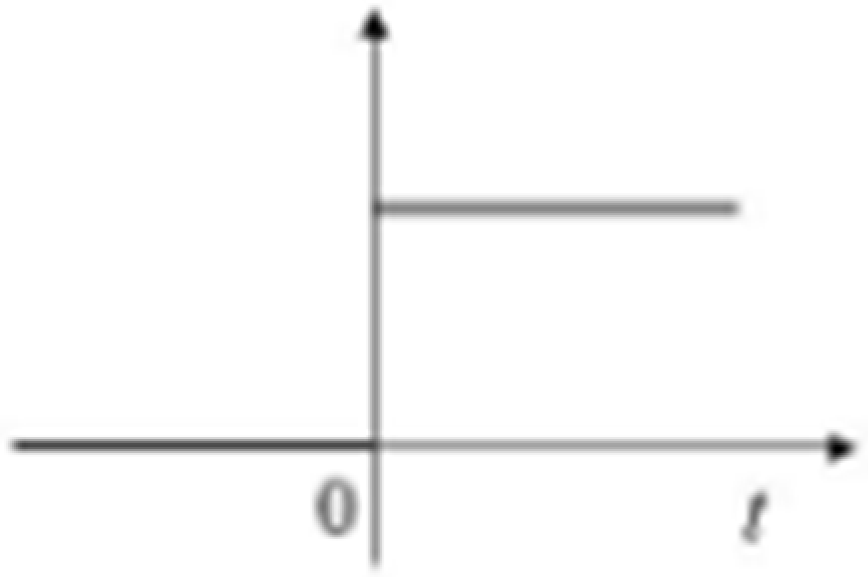
co pozwala w ostateczności na przewidzenie odpowiedzi układu na każde inne (dowolne) pobudzenie.

# Wyznaczanie odpowiedzi czasowych

Odpowiedź układu można wyznaczyć posiadając znaną transmitancję operatorową układu oraz transformatę sygnału wejściowego. Zwyczajowo, spośród odpowiedzi czasowych wyznacza się dwie zasadnicze odpowiedzi

Odpowiedź impulsową:


Odpowiedź skokową:



# Charakterystyka skokowa (odpowiedź skokowa)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Longrightarrow Y(s) = G(s)\,U(s)$$

W celu uzyskania charakterystyki skokowej należy liniowy obiekt stacjonarny pobudzić sygnałem wejściowym w postaci

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t >= 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$$

Otrzymujemy odpowiednio postać transmitancyjną oraz czasową sygnału wyjściowego

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{G(s)}{s} \Longrightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} = \int_0^t g(\tau)d\tau = h(t)$$

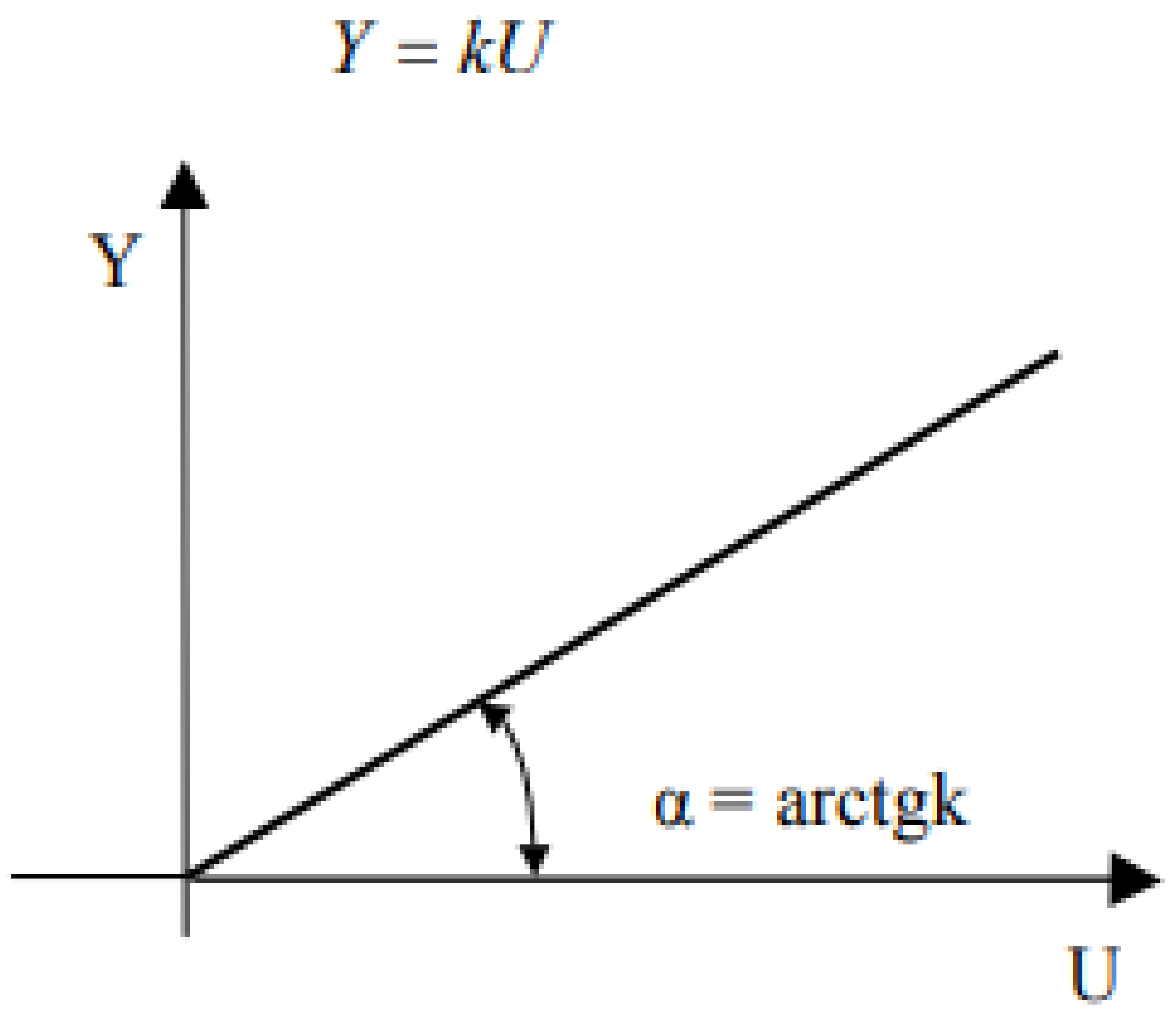
# Człon proporcjonalny

Człon proporcjonalny można opisać za pomocą równania w dziedzinie czasu

$$y(t) = ku(t)$$

Oraz w formie transmitancji operatorowej

$$Y(s) = k\ U(s)$$

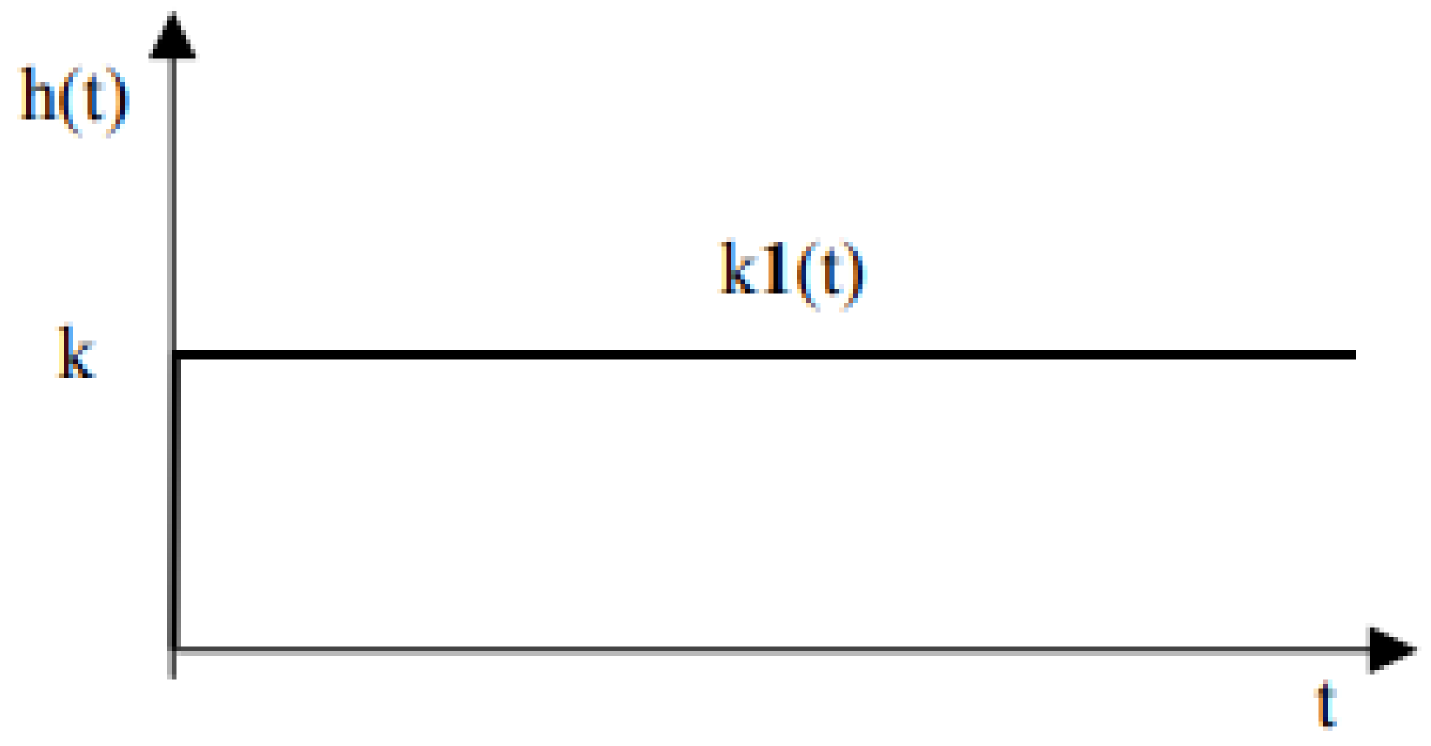


# Człon proporcjonalny

Odpowiedź będzie więc sygnałem wejściowym wzmocnionym *k* razy

W przypadku pobudzenia skokiem jednostkowym otrzymujemy

$$h(t) = k$$



# Człon inercyjny

Niech liniowy obiekt stacjonarny będzie opisany poniższym równaniem różniczkowym

$$T\frac{dy}{dt} + y = ku$$

Odpowiadającemu zapisowi w formie transformat

$$Y(s)(Ts+1) = kU(s)$$

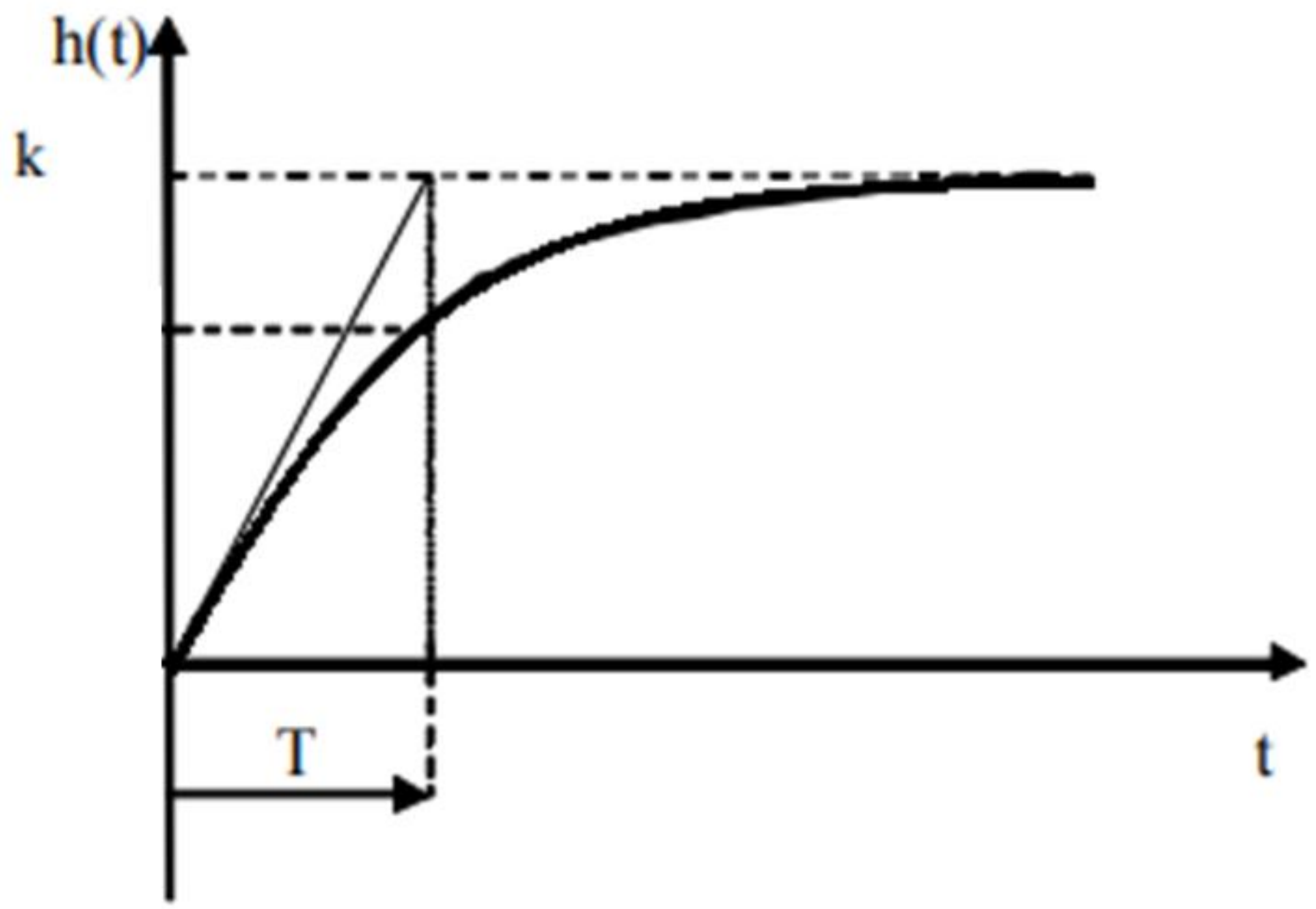
Oraz transmitancji operatorowej

$$Y(s) = \frac{k}{Ts+1}U(s)$$

# Człon inercyjny

Po pobudzeniu obiektu skokiem jednostkowym otrzymujemy równanie wyjścia

$$Y(s) = \frac{k}{Ts(s+\frac{1}{T})}$$

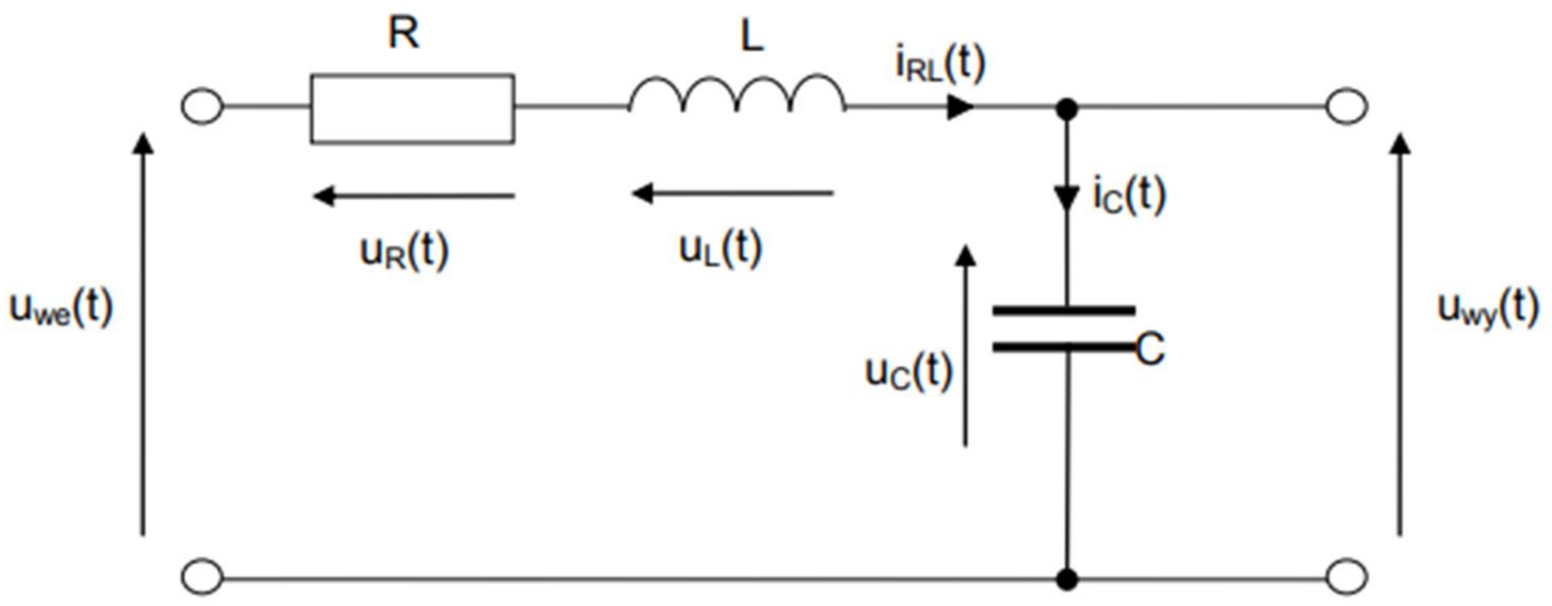



Natomiast po dokonaniu odwrotnej transformacji Laplace'a otrzymujemy formę czasową

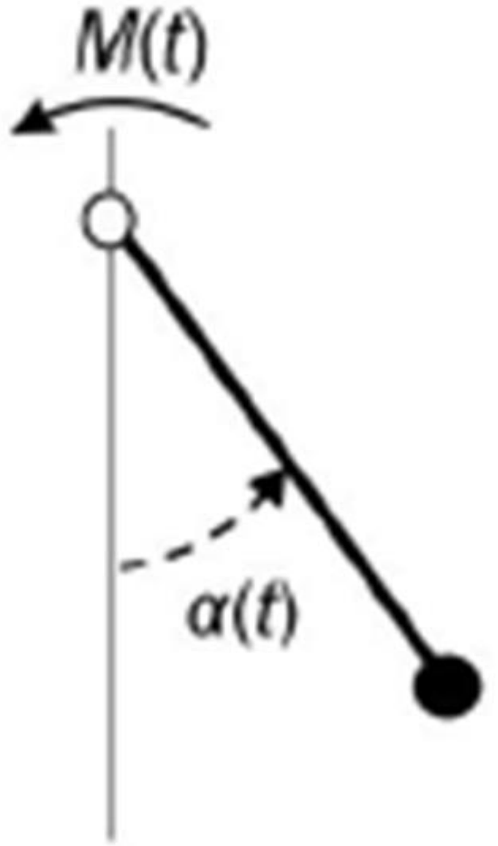
$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

# Człon oscylacyjny

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\xi\omega_n\frac{dy}{dt}+\omega_n^2y=k\omega_n^2u$$




$$Y(s)=\frac{k\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n^2}U(s)$$



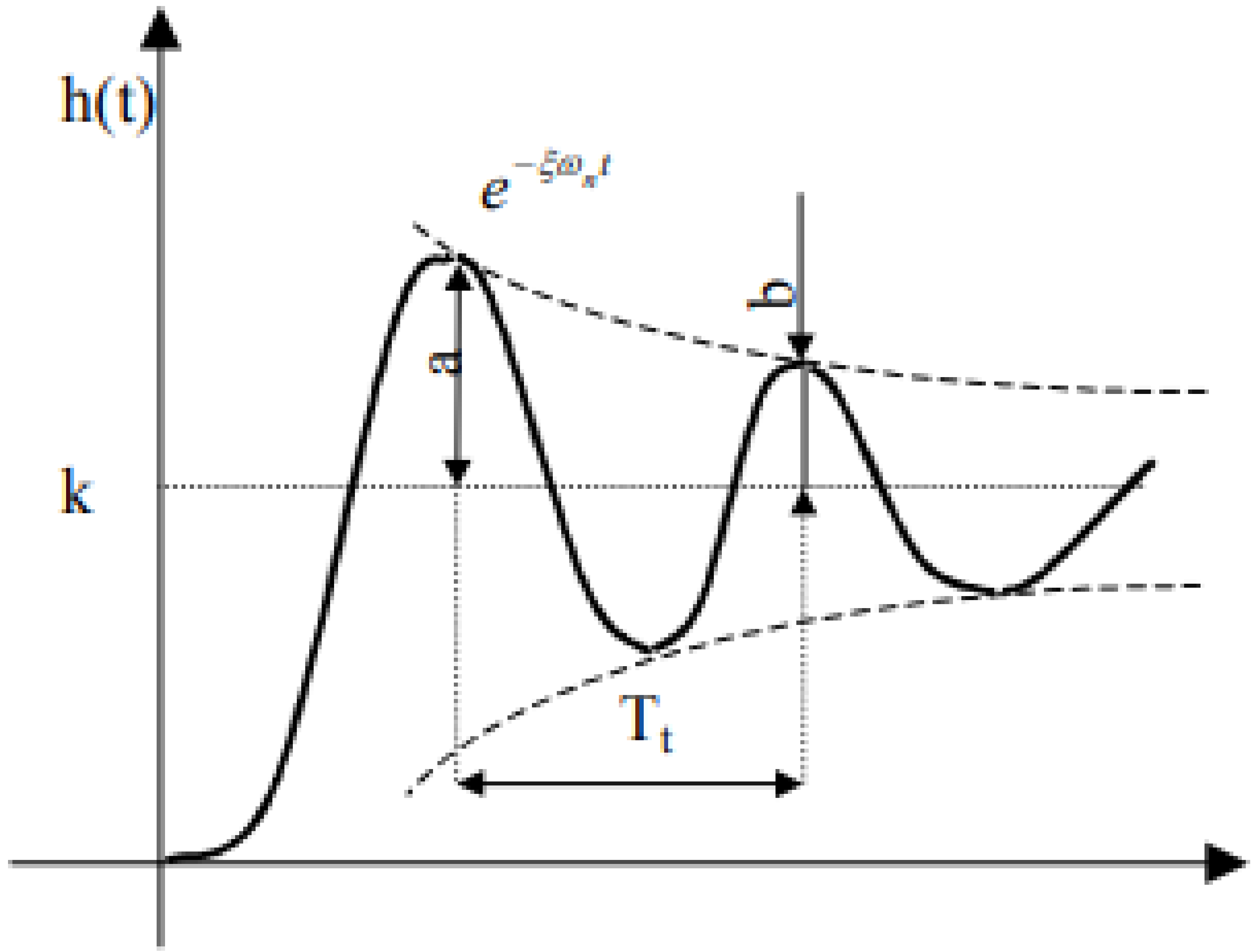

$$G(s)=\frac{k\omega_n{}^2}{s^2+2\xi\omega_ns+\omega_n{}^2}$$

# Człon oscylacyjny

$$\mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s}\right]$$

$$h(t) = k\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_w t + \varphi)\right]$$

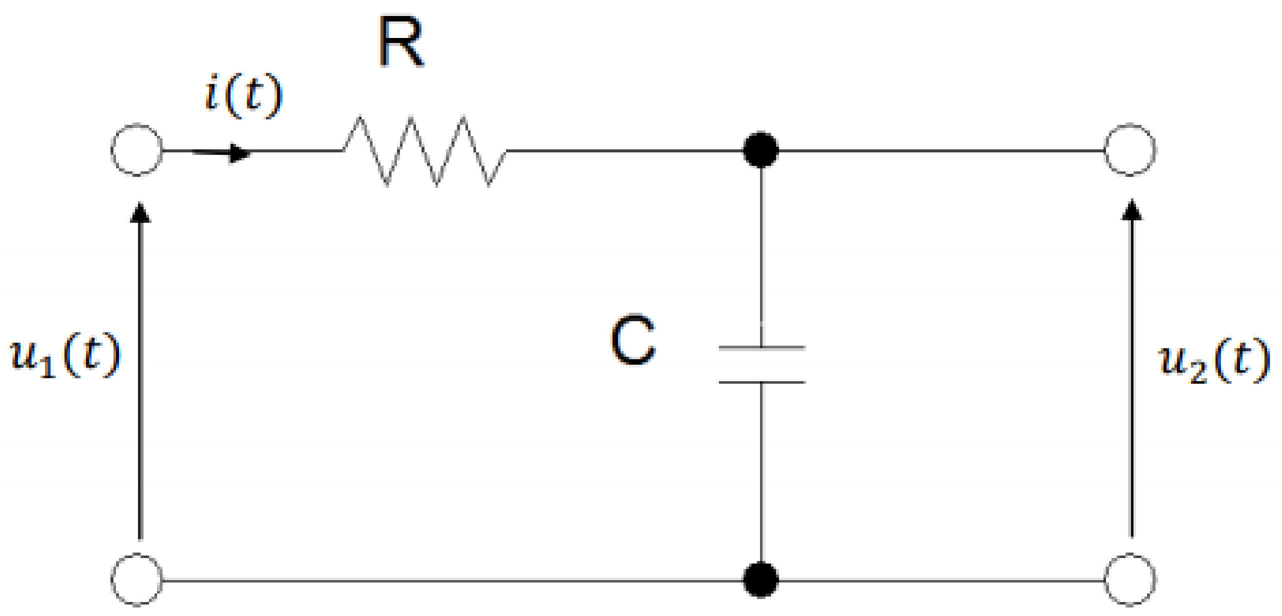
$$\lim_{t \to \infty} h(t) = k$$



# Przykłady

# Przykład I

Oblicz charakterystykę skokową przedstawionego układu RC




$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot s}$$

Oczywiście, odpowiedź skokowa daje się opisać równaniem

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} = L^{-1}\{\frac{G(s)}{s}\}$$

# Przykład I

Należy obliczyć transformatę odwrotną z wyrażenia

$$H(s) = \frac{1}{s(RCs+1)}$$

Na początku przeprowadzimy rozkład na ułamki proste

$$\frac{1}{s(RCs+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(RCs+1)}$$

$$\frac{1}{s(RCs+1)} = \frac{A(RCs+1)+Bs}{s(RCs+1)}$$

| $f(t),\ t \geq 0$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $\delta(t)$ unit impulse | $1$ |
| $1(t)$ unit step | $\frac{1}{s}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{-bt}$ | $\frac{1}{s+b}$ |
| $1-e^{-bt}$ | $\frac{b}{s(s+b)}$ |
| $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| $\sinh(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2-\omega}$ |
| $\cosh(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2-\omega}$ |
| | |
| $a \cdot f(t)$ | $a \cdot F(s)$ |
| $x(t)+y(t)$ | $X(s)+Y(s)$ |
| $x(t)*y(t)$ convolution | $X(s) \cdot Y(s)$ |
| $\frac{dy(t)}{dt}$ | $sY(s)-y(0)$ |
| $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ | $s^2Y(s)-sy(0)-\frac{dy(0)}{dt}$ |
| $\frac{d^ny(t)}{dt^n}$ | $s^nY(s)-\frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}-s\frac{d^{n-2}y(0)}{dt^{n-2}}-\ldots-s^{n-1}y(0)$ |

# Przykład I

$$\frac{1}{s(RCs+1)}=\frac{A(RCs+1)+Bs}{s(RCs+1)}$$

$$\Downarrow$$

$$ARCs+A+Bs=1$$

$$\Downarrow$$

$$A=1, B=-RC$$

$$\Downarrow$$

$$H(s)=\boxed{\frac{1}{s}}-\boxed{\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}}$$

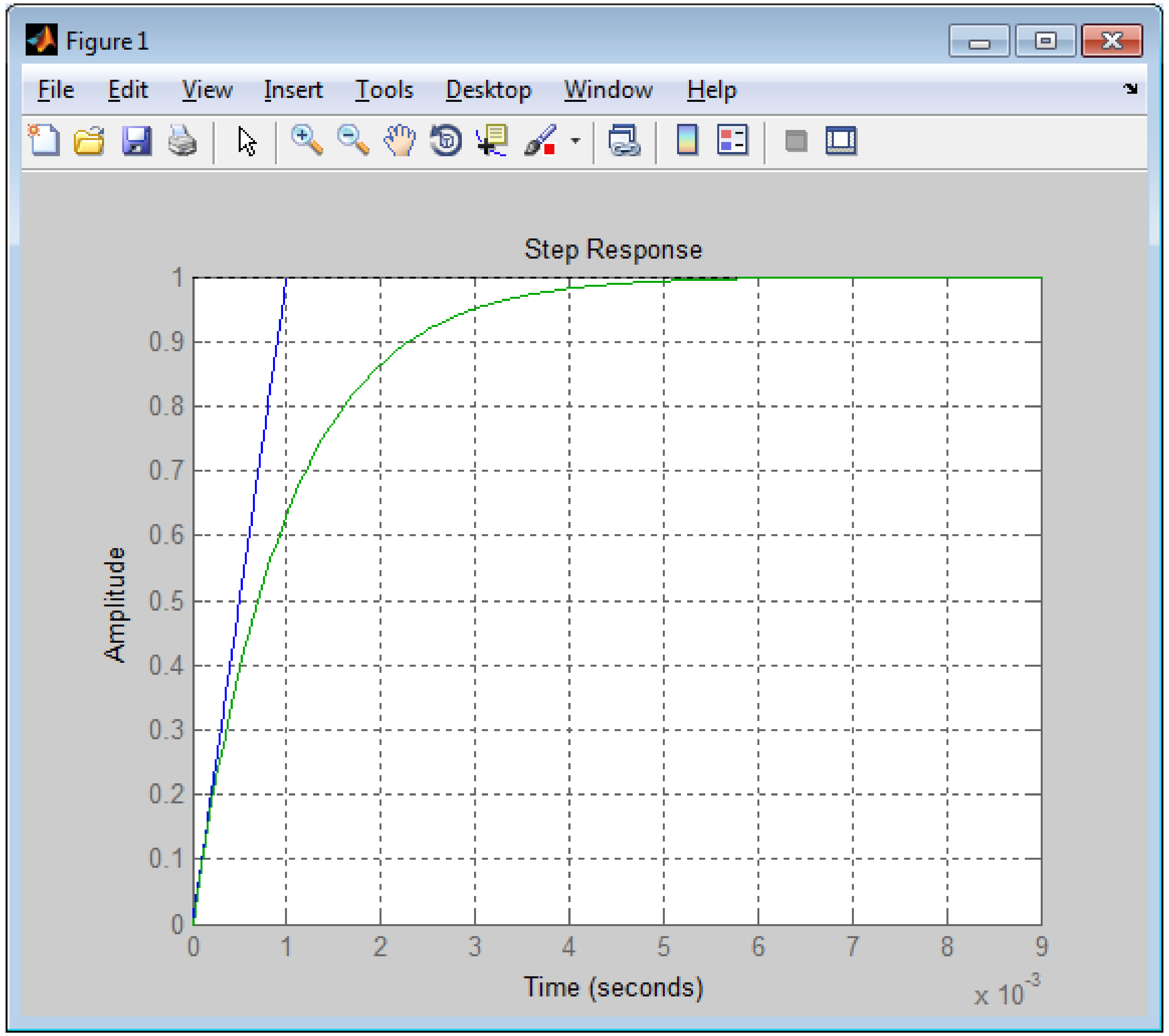
| $f(t),\ t\geqslant 0$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $\delta(t)$ unit impulse | $1$ |
| $1(t)$ unit step | $\frac{1}{s}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{-bt}$ | $\frac{1}{s+b}$ |
| $1-e^{-bt}$ | $\frac{b}{s(s+b)}$ |
| $\sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ |
| $\cos(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$ |
| $\sinh(\omega t)$ | $\frac{\omega}{s^2-\omega}$ |
| $\cosh(\omega t)$ | $\frac{s}{s^2-\omega}$ |
| | |
| $a\cdot f(t)$ | $a\cdot F(s)$ |
| $x(t)+y(t)$ | $X(s)+Y(s)$ |
| $x(t)*y(t)$ convolution | $X(s)\cdot Y(s)$ |
| $\frac{dy(t)}{dt}$ | $sY(s)-y(0)$ |
| $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$ | $s^2Y(s)-s\,y(0)-\frac{dy(0)}{dt}$ |
| $\frac{d^ny(t)}{dt^n}$ | $s^nY(s)-\frac{d^{n-1}y(0)}{dt^{n-1}}-s\frac{d^{n-2}y(0)}{dt^{n-2}}-\ldots-s^{n-1}y(0)$ |

# Przykład I

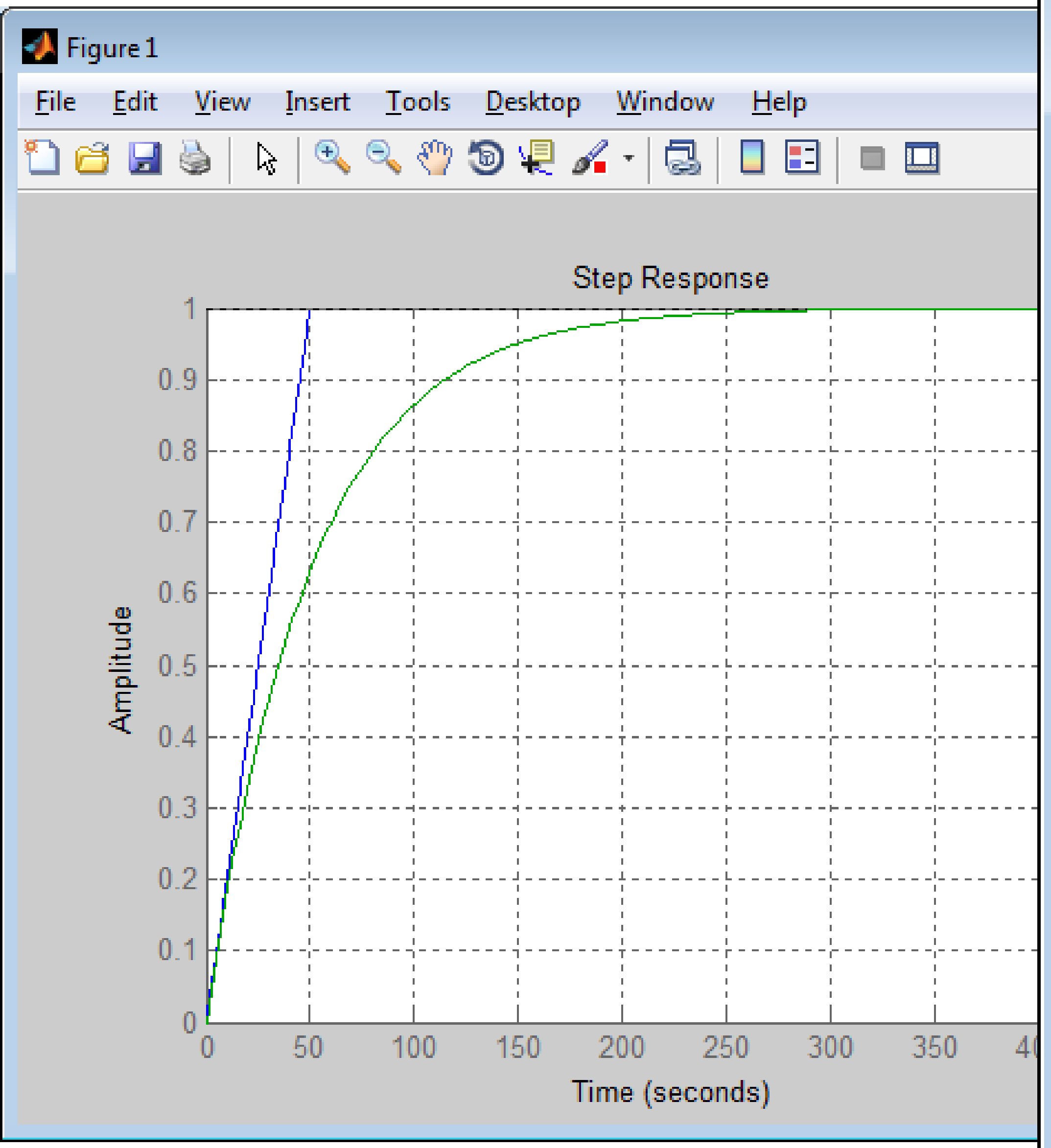
$$H(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

$$h(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})1(t)$$

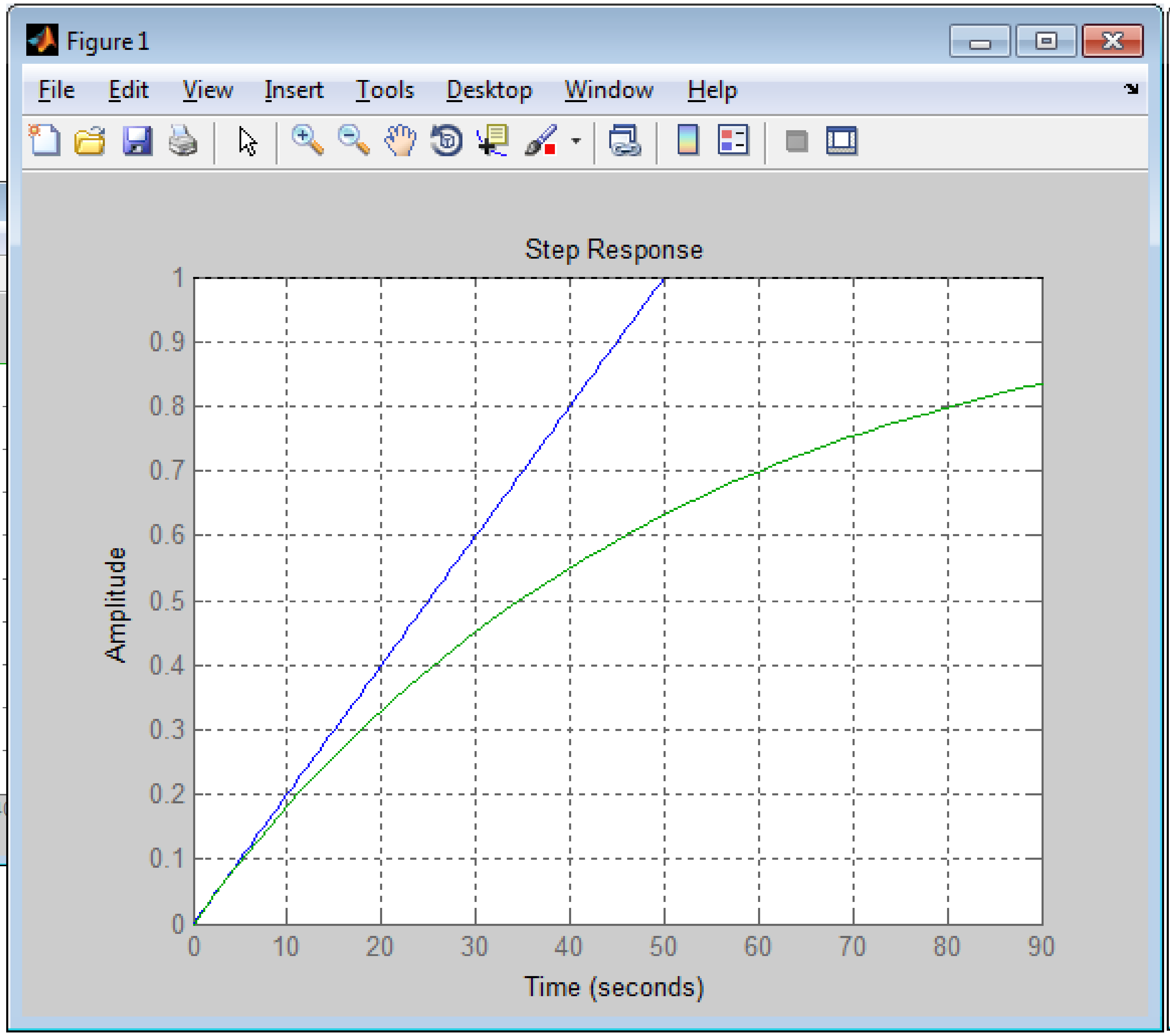
R=1,C=0.001



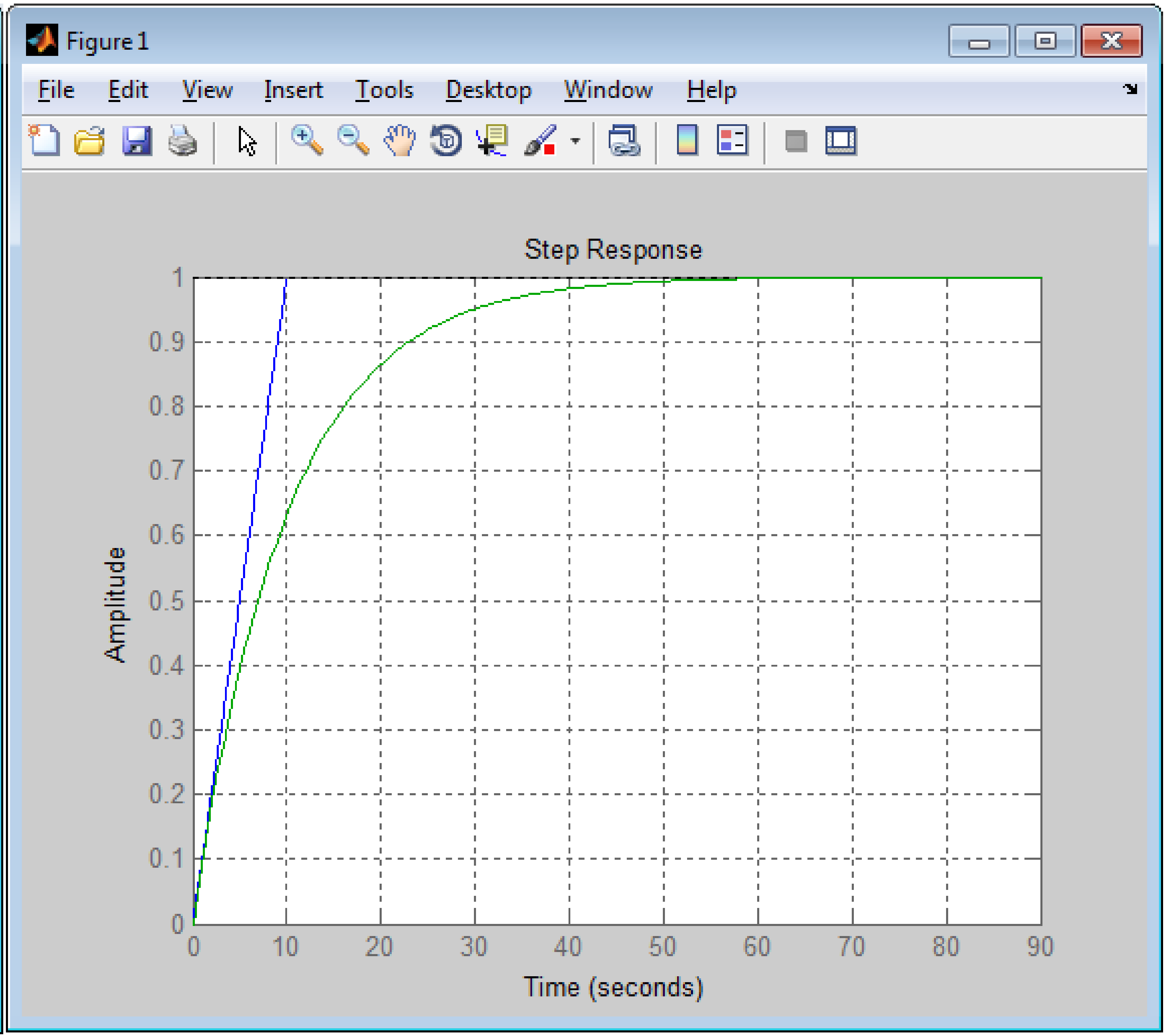
# Przykład I




R=100,C=0.5



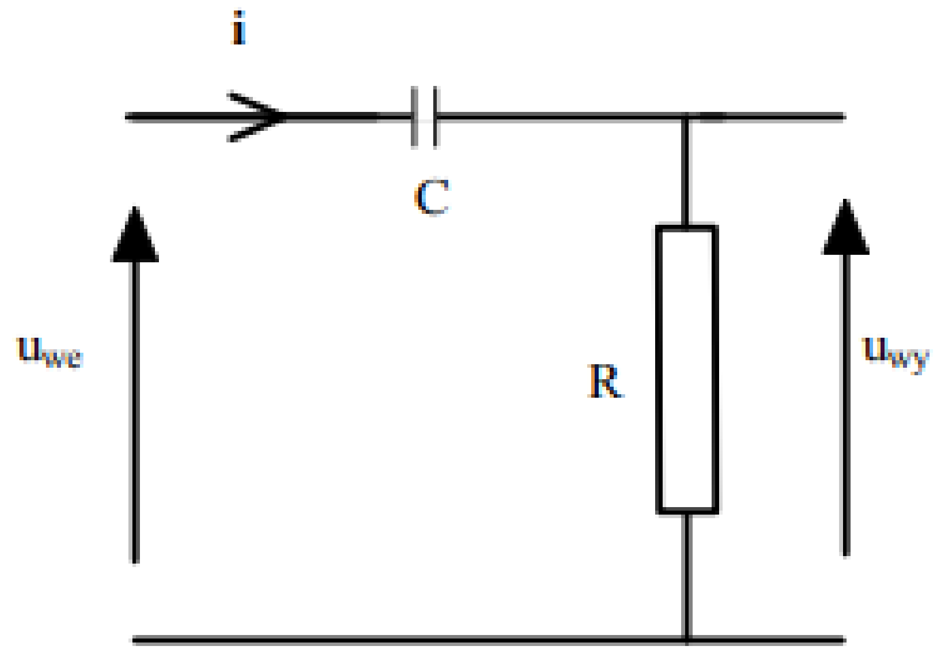

R=100,C=0.1



# Przykład II

W tym przypadku rozpatrujemy rzeczywisty człon różniczkujący opisany równaniem

$$CR\frac{du_{wy}}{dt} + u_{wy} = CR\frac{du_{we}}{dt}$$




$$G(s) = \frac{U_{wy}(s)}{U_{we}(s)} = \frac{ks}{Ts+1},$$

$$k = RC$$
$$T = RC$$

# Przykład II

Obliczmy teraz odpowiedź takiego układu na skok jednostkowy

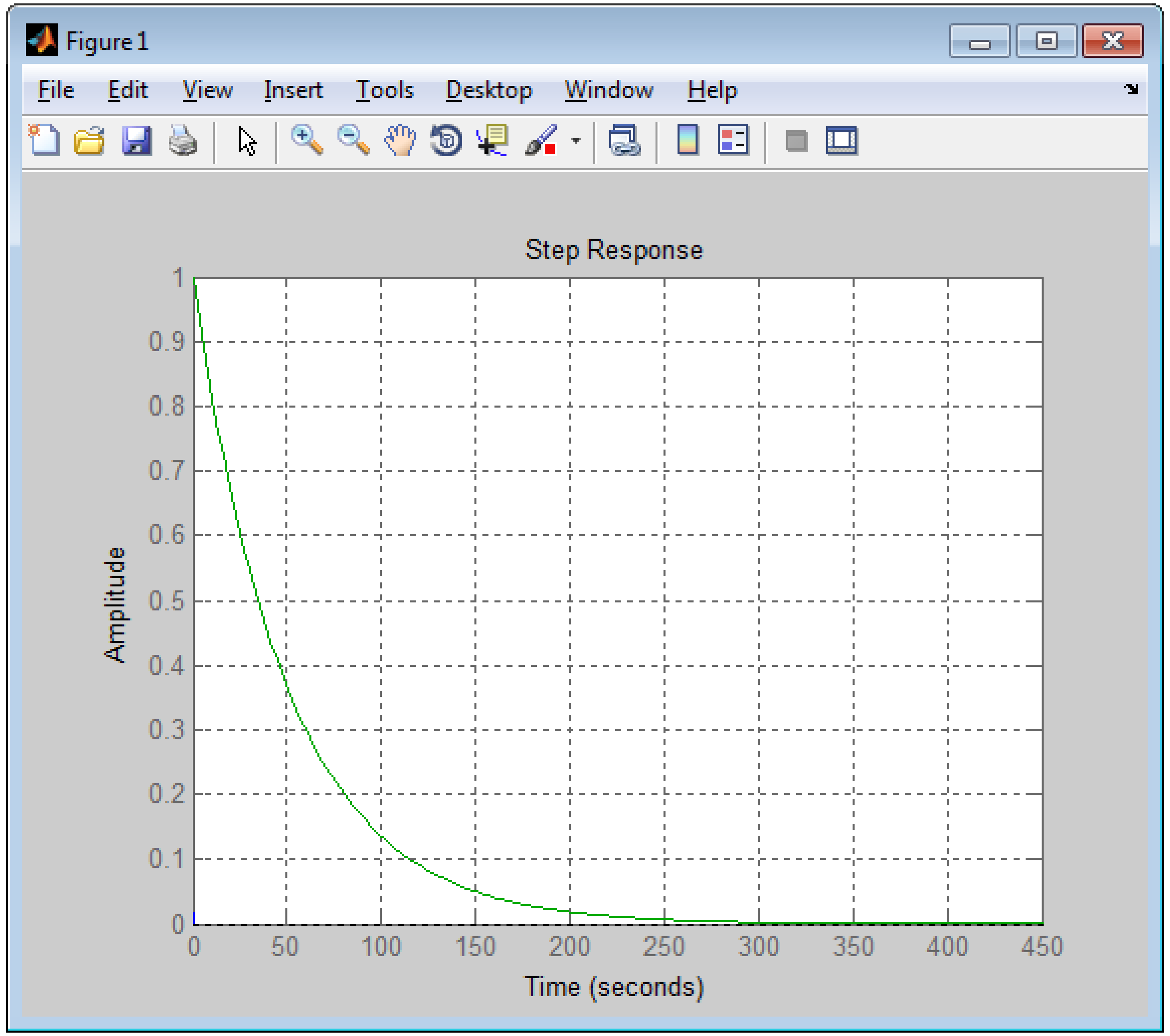
$$H(s)=\frac{ks}{Ts+1}\cdot\frac{1}{s}=\frac{RC}{RCs+1}$$

$$H(s)=\frac{RC}{RCs+1}=\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$

# Przykład II

$$H(s)=\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}$$

$$h(t)=e^{-\frac{t}{RC}}1(t)$$



Dziękuję za uwagę